Tři starobabylónské matematické tabulky

Martina Bečvářová

Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní
České vysoké učení technické v Praze

becvamar@fd.cvut.cz

Geometrická problematika

– **úlohy vyšly z praxe**

zemědělství **(vyměřování, osivo),** ***stavitelství*** **(objem zdiva a výkopů, objem sýpek, výška staveb, sklony náspů),** ***obchod*** **(prodej pozemků),** ***válečnictví*** **(budování náspů a hradeb, odhad výšky zdí pro žebříky),** ***běžný život*** **(rozdělování dědictví, placení daní)**

– **umělé úlohy**

výukové cíle a rozvoj „matematického myšlení“,

hledají se údaje, které by se v praxi měřily, jsou zadány nevhodné jednotky apod.

- **číselné hodnoty jsou v „praktických“ úlohách většinou voleny tak, aby úlohy „dobře vycházely“**
- **netrápit počtáře aritmetickými operacemi a převodem jednotek, pokud právě to nebylo cílem výuky**

Tři tabulky ze starobabylónského období (19. až 17. století př. n. l.)

– **kategorie „*dívej se, přemýšlej, vidíš*“ neboli *matematika položena před oči bez zbytečného psaní a vysvětlování***

Lichoběžník

- **oblíbený útvar starobabylónských matematiků**
- **nejčastěji *rovnoramenný lichoběžník* (část zikkuratu, tvar výkopu kanálu, …)**
- **někdy i *pravoúhlý lichoběžník* (řez náspem, zdí, …)**
- **špatně poznáváme typ (terminologie, obrázky)**
- **dochovalo se velké množství tabulek, na nichž se počítá obsah lichoběžníku nebo se lichoběžník dělí na několik částí daných vlastnosti nebo tvarů**

Tabulka YBC 7290

Yale Babylonian Collection Yale University New Haven

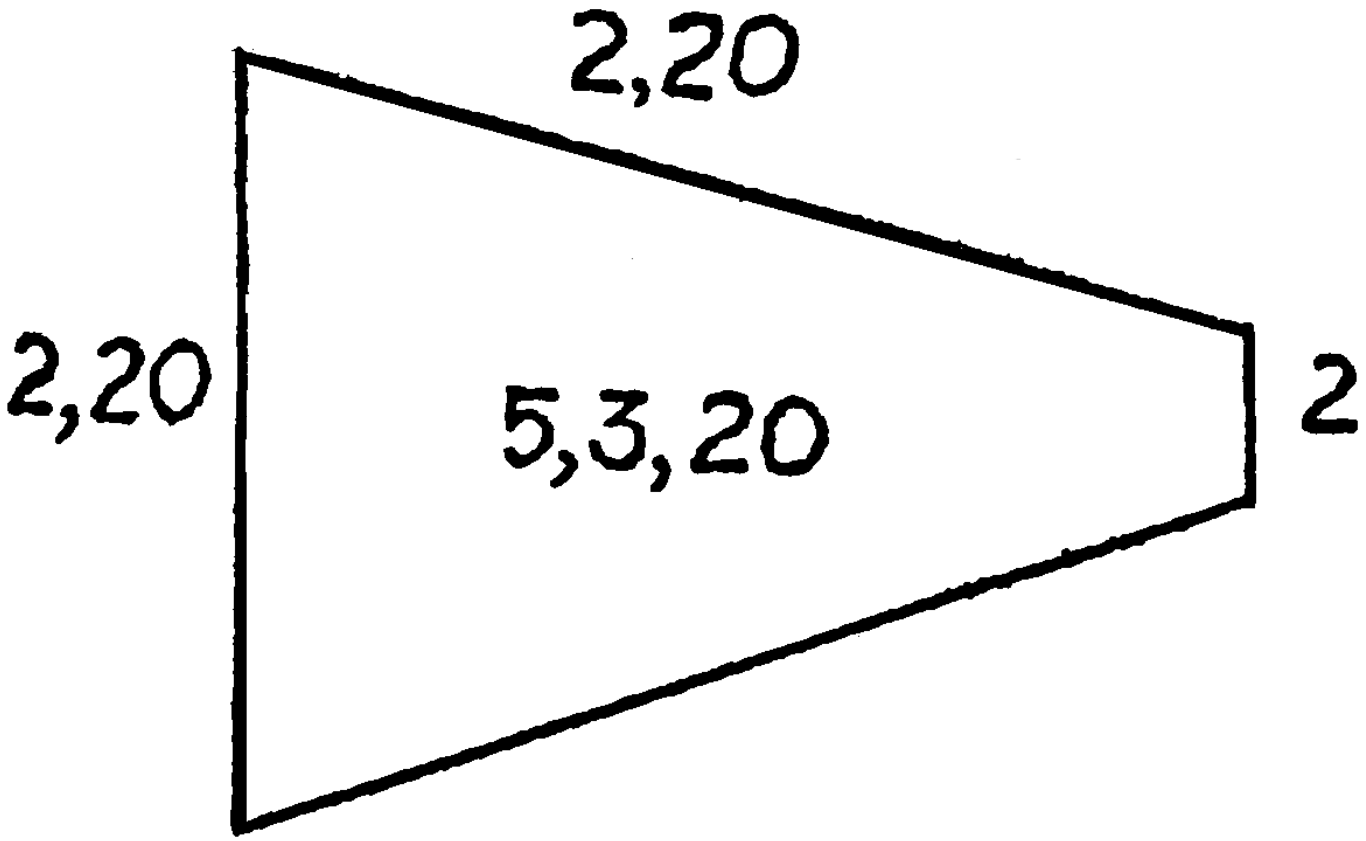
– objevena na konci 19. století

– ve 20. letech 20. století ji studoval historik matematiky O. Neugebauer

– čtvercová tabulka, délka hrany asi 6 cm

– zcela bez slovního doprovodu

7290
cm
1
2
3
4
5
6


2,20
2,20
5,3,20
2

Nedokonalý obrázek rovnoramenného lichoběžníku doplněný čtveřicí čísel zapsaných klínopisem v šedesátkové poziční soustavě:

- **(2) a (2, 20) u základen**
- **(2, 20) u ramene**
- **(5, 3, 20) uvnitř**

– ***problém s interpretací řádů*** **(nula se nezapisuje na začátku či konci čísla)**

– ***problém terminologický*** **(rameno x výška)**

Výklad smyslu zapsaných čísel:

$$S = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \cdot v$$

$z_1 = (2, 20) = 2 \cdot 60 + 20 = 140$

$z_2 = (2, 0) = 2 \cdot 60 = 120$

$r = v = (2, 20) = 2 \cdot 60 + 20 = 140$ (rameno = výška)

$S = \frac{1}{2}(140 + 120) \cdot 140 = 18\,200 = 5 \cdot 3600 + 3 \cdot 60 + 20$

$= (5, 3, 20)$

Náš správný postup:

$$S = 1/2\ (z_1 + z_2) \cdot v$$

Výpočet výšky na základě znalosti *Pythagorovy věty*

$$v = \sqrt{[r^2 - (\ 1/2\ (z_1 - z_2))^2]} = \sqrt{(140^2 - 10^2)} \approx 139,\ 64$$

a tedy obsah lichoběžníku bude

$$S \approx 130 \cdot \sqrt{19\ 500} \approx 18\ 153,\ 5$$

- **starobabylónská hodnota: 18 200**
- **naše hodnota: 18 153, 5**

- **chyba počtáře je jen 0,26%**

– není jasné, zda si byl počtář své chyby vědom
– speciální volba „výška je téměř rovna ramenu“
– „dlouhé a štíhlé“ lichoběžníky

Čtverec

- **elementární útvar (zadaný jedním údajem)**
- **výpočet obsahu a obvodu, výpočet délky úhlopříčky, dělení čtverce na útvary předem daných vlastností nebo tvarů**

- **„zdroj“ na příklady vyžadující znalost *Pythagorovy věty***

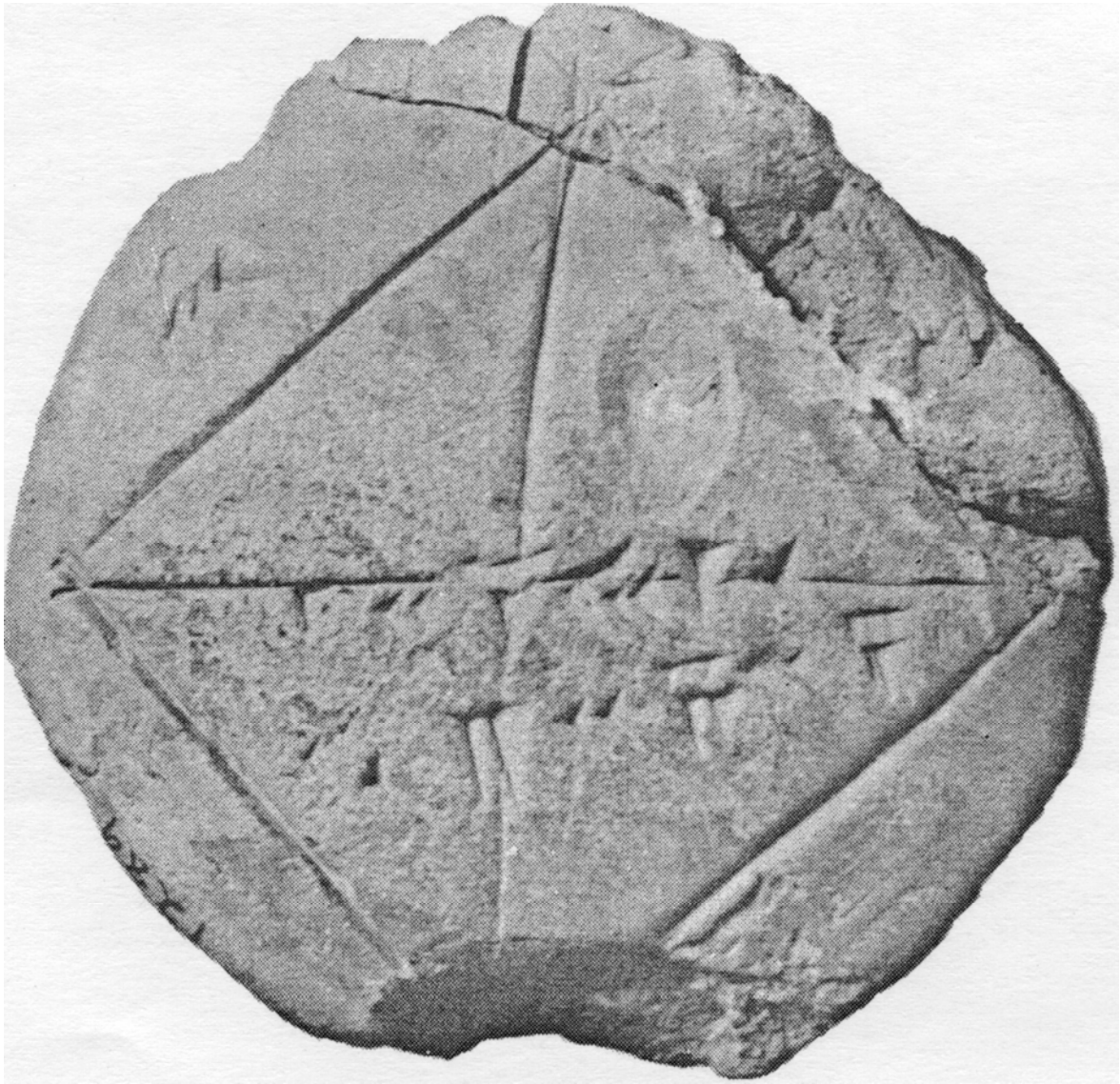
Tabulka YBC 7289

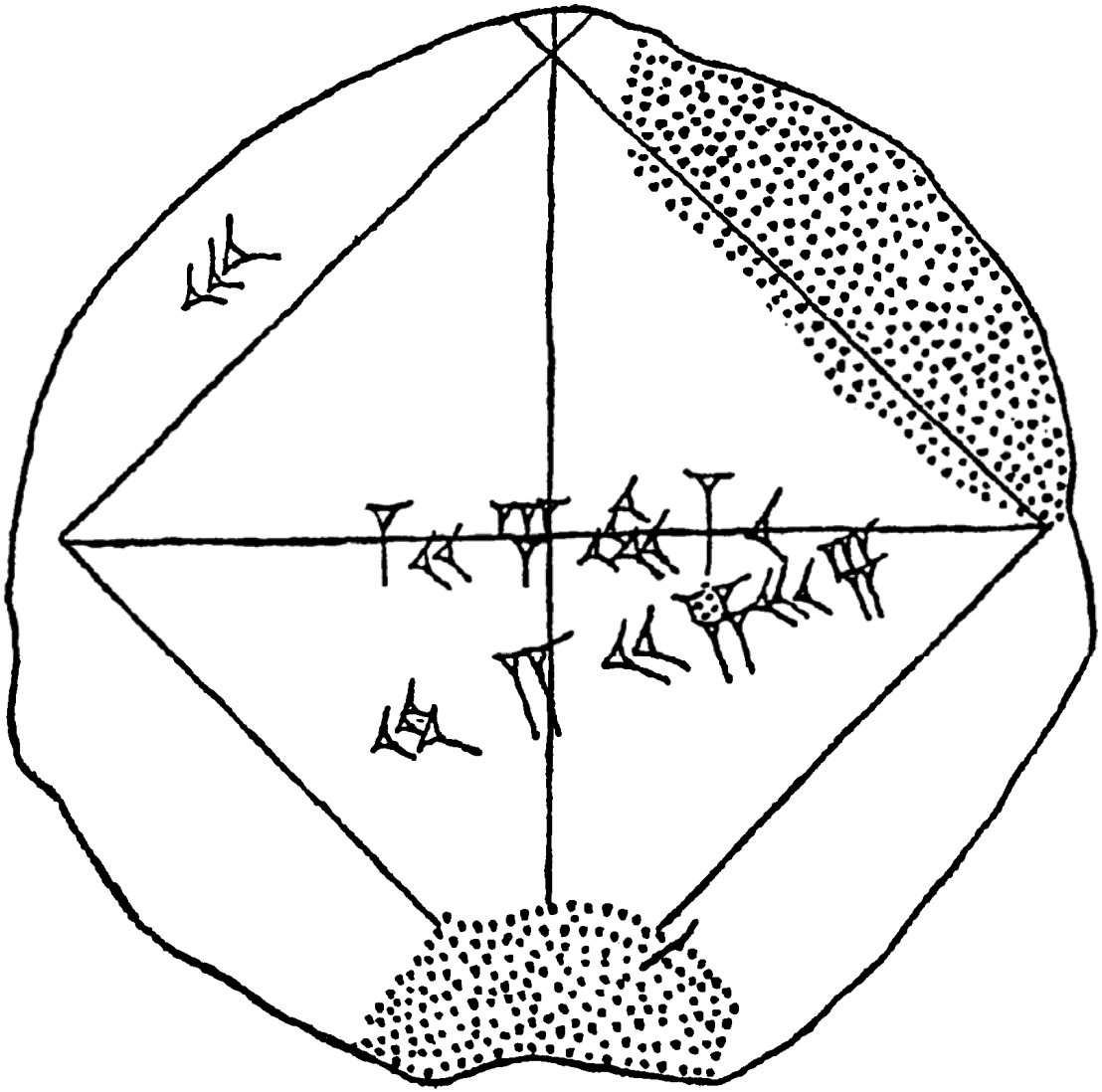
– snad z doby 1800 až 1600 př. n. l.

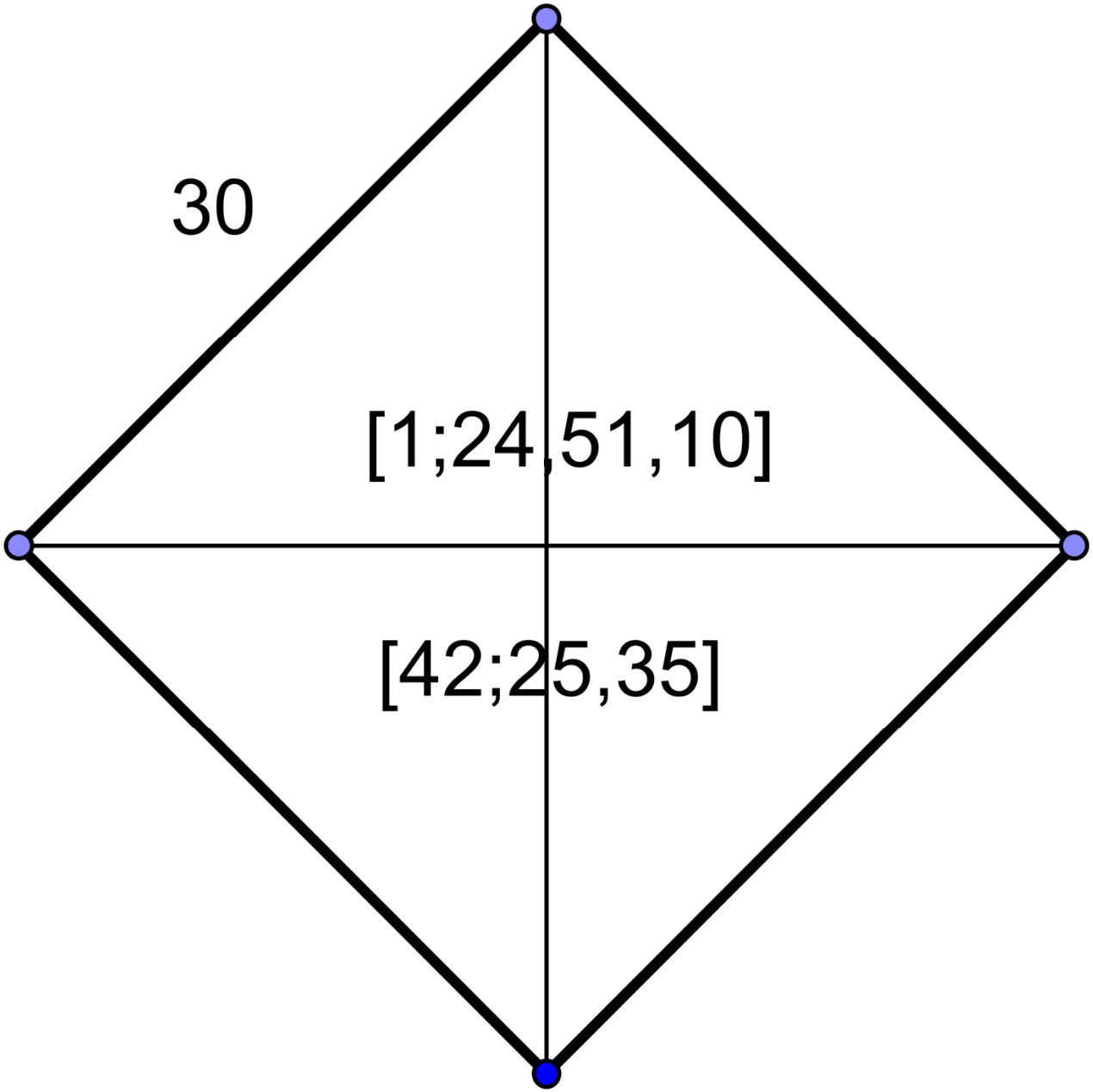
Yale Babylonian Collection Yale University New Haven

– objevena na konci 19. století
– ve 20. letech 20. století ji studoval historik matematiky O. Neugebauer

– kruhová tabulka, průměr asi 7 cm
– zcela bez slovního doprovodu






30
[1;24,51,10]
[42;25,35]

Výklad smyslu zapsaných čísel:

30 je délka strany čtverce

(42; 25, 35) je délka úhlopříčky čtverce

(1; 24, 51, 10) přibližná hodnota čísla $\sqrt{2}$

(1; 24, 51, 10) ≈ 1, 414 212 963 …

$\sqrt{2}$ ≈ 1, 414 213 562 …

Přesnost na 5 desetinných míst !!!

- **Tabulka dokládá znalost *Pythagorovy věty* cca 1200 let před řeckou matematikou, neboť**

$$a^2 + a^2 = u^2, \text{ tj. } u = \sqrt{2} \cdot a.$$

- **Neuvěřitelná přesnost výpočtu $\sqrt{2}$.**

- **Jak byla dosažena?**

Metoda výpočtu druhé odmocniny

- **vychází z postupů uvedených v dochovaných úlohách**

- **Hrubá aproximace**

$$\sqrt{A} = \sqrt{(a^2 + b)} \approx \sqrt{(a^2 + b + b^2/4a^2)} = a + b/2a =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot (2a + b/a) = \tfrac{1}{2} \cdot [a + (a^2+b)/a] = \tfrac{1}{2} \cdot (a + A/a)$$

– hodnota je větší než skutečná hodnota odmocniny

– metoda vcelku vyhovuje pro odmocnění větších čísel

– nepostačuje pro odmocnění malých čísel

Výpočet čísla √2 metodou průměrů:

- **1. hrubý krok**

$\sqrt{2} = \sqrt{(1 + 1)} \approx 1 + 1/2 = 3/2 = (1; 30)$

- **1. aproximace: $a_1 = (1; 30) = 1{,}5$**

$(1; 30)^2 = (2; 15) > 2$

$2/a_1 = (1; 20) \quad \rightarrow \quad (1; 20)^2 = (1; 46, 40) < 2$

vezmeme průměr: $\frac{1}{2} \cdot (a_1 + 2/a_1) = (1; 25)$

- **2. aproximace: $a_2 = (1; 25) \approx 1{,}4166 \ldots$**

$(1; 25)^2 = (2; 0, 25) > 2$

$2/a_2 = (1; 24, 42, 21) \rightarrow (1; 24, 42, 21)^2 < 2$

vezmeme průměr: $\frac{1}{2} \cdot (a_2 + 2/a_2) = (1; 24, 51, 10)$

- **3. aproximace: $a_3 = (1; 24, 51, 10) \approx 1{,}414\,212\,96 \ldots$**

Ale to není tak jednoduché, jak se zdá!!!

- $a_2 = (1; 25) = 85/60$.

- na klasické starobabylónské tabulce reciprokých hodnot přirozených čísel totiž nebyla a ani nemoha být uvedena reciproká hodnota k číslu (1;25), protože toto číslo není v šedesátkové soustavě číslem regulárním

- neexistuje k němu přesná reciproká hodnota.

- problém je způsoben tím, že čitatel zlomku 85/60 není ve tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla, neboť $85 = 17 \cdot 5$

- číslo 85 tudíž není regulárním číslem a neexistuje k němu reciproká hodnota.

1. způsob

Počtář mohl použít postup pro přibližný výpočet reciproké hodnoty, což by nebylo vůbec snadné a potřebovalo by to několik výpočetních kroků.

Pravděpodobně by se touto cestou nevydal, neboť by byla velmi zdlouhavá a náročná.

2. způsob

- **hledat reciprokou hodnotu k nejbližšímu vhodnému regulárnímu číslu, tj. k číslu (1; 21) = 81/60.**

- **Tento postup by však nevedl k výraznému zlepšení odhadu druhé odmocniny ze dvou, neboť získaná hodnota by činila (1; 24, 56, 40) ≈ 1,4157.**

- **Shodovala by se s naší aproximací jen na dvě desetinná čísla a byla by jen o málo přesnější než první aproximace získaná metodou průměru.**

- **Proto by bylo lepší vzít jako nejbližší vhodné regulární číslo „tříciferné“ číslo (1; 25, 20), tj. 5120/3600.**

- **Jeho aplikace při použití metody průměru dá aproximaci druhé odmocniny ze dvou ve tvaru**

  (1; 24, 51, 15) ≈ 1,414236, jejíž přesnost je však jen na čtyři desetinná místa.

- **Pak by počtář mohl přejít k hledání nejbližšího vhodného regulárního číslo, které by bylo již číslem „čtyřciferným“.**

- **Tato cesta by byla sice náročná, ale nebyla by nemožná, neboť máme dochovanou tabulku AO 6456 s řadou reciprokých čísel z intervalu**

  (1, 0, 0, 0, 0) až (3, 0, 0, 0, 0, 0).

3. způsob

- **Počtář mohl také použít tabulku přibližných reciprokých hodnot, kde byla uvedena aproximace reciproké hodnoty čísla 17.**

- **Takové tabulky se nám ze starobabylónského období dochovaly.**

- **Pak již stačilo vzít dvanácti násobek reciproké hodnoty čísla 17, neboť 60/85 = 12/17 = 12 · 1/17.**

- **Počtář by tak snadno získal přibližnou reciprokou hodnotu čísla (1; 25), tj. našel by na tabulce číslo (0; 42, 21, 10, 35).**

- **Vypočítal by jeho dvojnásobek, sečetl jej s číslem (1;25) a ze součtu vypočítal polovinu, což nebyl naprosto žádný problém.**

- **Po jistém úsilí by počtář obdržel číslo (1; 24, 51, 10) neboli 1,414212 963…**

Přesnost na 5 desetinných míst !!!

- **Ze druhého tisíciletí před naším letopočtem máme dochované tabulky, kde se pracuje s výše uvedenou přesností.**

- **Máme však dochovány také tabulky, kde se pracuje „jen“ s druhou aproximací, tj. s hodnotou 85/60 neboli 17/12.**

- **Nemáme dochovány tabulky, kde by se pracovalo jen s hrubou aproximací.**

Kruh

- **elementární křivočarý útvar (zadán jedním údajem)**

- **výpočet obvodu a obsahu**
- **problém přesnosti čísla π**
- **znalost vztahu obvodu a obsahu kruhu**

Tabulka YBC 7302

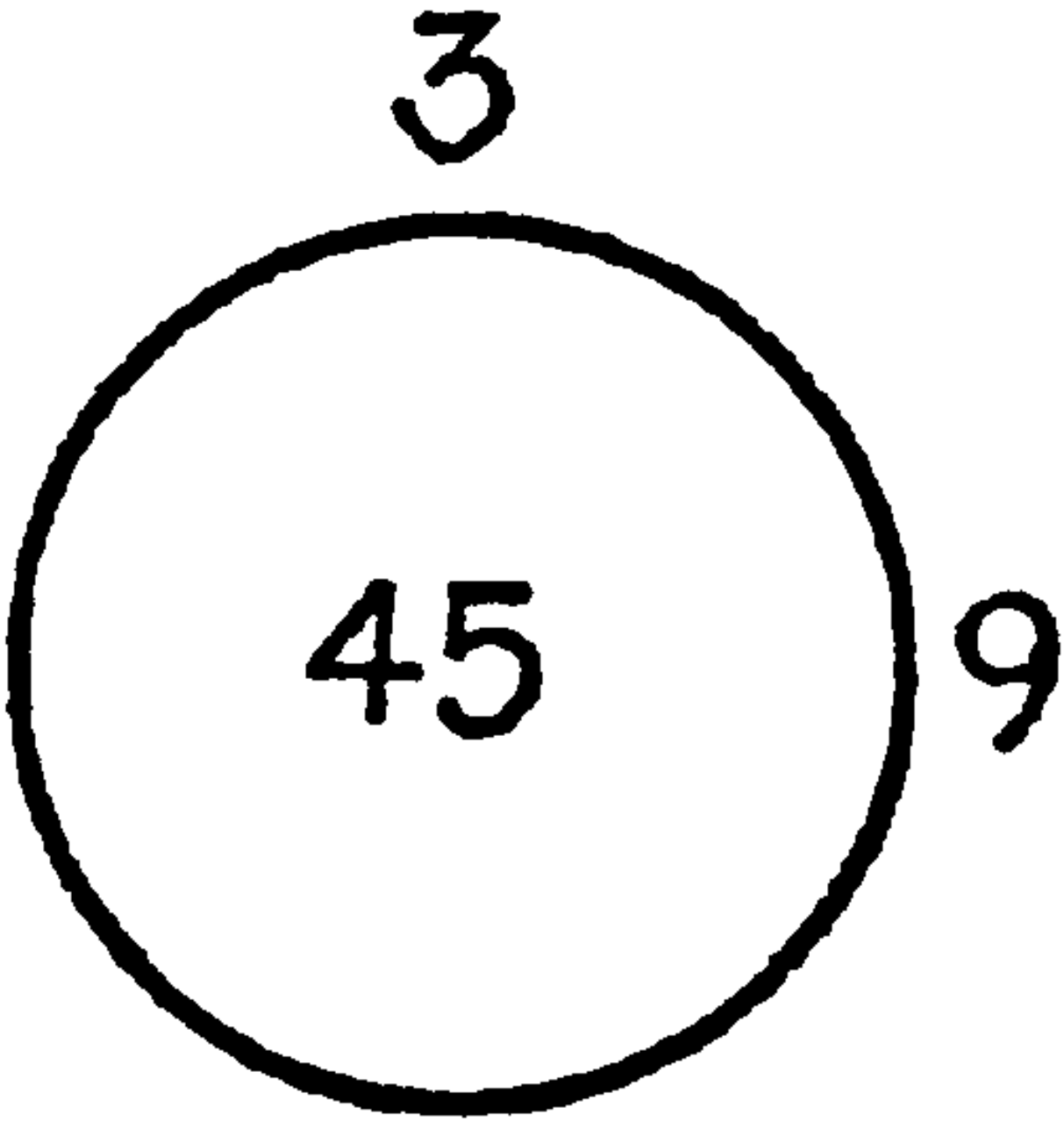
Yale Babylonian Collection Yale University New Haven

– objevena ve 30. letech 20. století v lokalitě Susa (Irán, původně hlavní město Elamské říše)

– kruhová tabulka, průměr asi 8 cm

– zcela bez slovního doprovodu

cm
1
2
3
4
5
6


3
45
9

Nedokonalý obrázek kruhu s uvedenou trojicí čísel

obsah: (0; 45) (uvnitř)
obvod: (3) (u obvodu)
čtverec obvodu: (9) (stranou)

Jak postupujeme dnes při výpočtu obsahu kruhu o poloměru r?

obsah kruhu $S = \pi \cdot r^2$ a obvod kruhu $o = 2\pi \cdot r$,

tedy $S = 1/(4\pi) \cdot o^2$

$S = 9/4\pi \approx 0{,}7162$.

„standardizovaný“ babylónský postup:

$$S = 1/12 \cdot o^2 = 5/60 \cdot o^2 = (0; 5) \cdot o^2.$$

- **babylonská „hodnota“ čísla π je tedy jen 3**

- **v uvedeném příkladě: $S = 9 \cdot (0; 5) = (0; 45) = 0{,}75$**
- **chyba je více než 4,5% (nezvykle vysoká)**

- **ke změně postupu nikdy pravděpodobně nedošlo**
- **nemáme dochovanou tabulku, kde by výpočet byl prováděn jinak**

- **Máme však tabulku ze starobabylónského období, která byla objevena roku 1936 v lokalitě Susa, na níž je použita aproximace $\pi = 3$ a $1/8 = 3{,}125$, která je o přesnější.**

- **Nedosahuje však zdaleka takové přesnosti odhadu π jakou měli počtáři ve starém Egyptě či ve starém Řecku.**

- **Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová, Hana Vymazalová: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003, 371 stran, ISBN 80-7196-255-4.**

- **Evert Marie Bruins, Marguerite Rutten: *Textes mathématiques de Suse*, Mémoires de la mission archéologique en Iran, svazek č. 34, Librairie Orientaliste Paul Geuthner, Paris, 1961, 136 stran.**

- **David Fowler, Eleonor Robson: *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics YBC 7289 in Context*, *Historia Mathematica* 25 (1998), str. 366–378.**

- **Otto Neugebauer, Abraham J. Sachs: *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series, svazek č. 29, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, 177 stran (reprint: Harrassowitz, Wiesbaden, 1986).**

Děkuji za pozornost.