

Role jablka v matematice

Martina Bečvářová

Katedra aplikované matematiky

FD ČVUT v Praze

Na Florenci 25

Praha 1, 110 00

becvamar@fd.cvut.cz

I. Dětství

- lidová píseň (mazurka ze Soběslavska a Třebońska)

Měla babka, čtyři jabka a dědoušek jen dvě.

„Dej mi, babko, jedno jabko budeme mít stejně.“

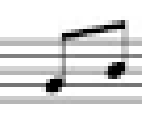
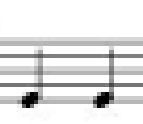
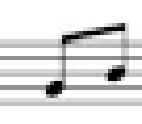
Měl dědoušek, měl kožíšek a babička jupku.

„Pojď, dědoušku, na mazurku, já si s tebou dupnu“.

- děti ji zpívají s radostí již v mateřské školce
- nevinná dětská písnička, lidová zábava
- nerovnost mezi lidmi, spravedlivé dělení
- genderový problém, ekologie



Měla babka čtyři jabka

			
Mě - la bab - ka Měl dě - dou - šek,	čty - ři jab - ka měl ko - ži - šek	a dě - dou - šek a ba - bi - čka	jen dvě jup - ku
			
dej mi, bab - ko, pojď dě - dou - šku	jed - no jab - ko, na ma - zur - ku,	bu - de - me mit já si s tebou	stej - ně. dup - nu,

Doporučené otázky pro současnou výchovu dětí v MŠ:

Kolik jablíček má babka?

Kolik jablíček má děda?

Kolik jablíček mají dohromady?

Kolik jablíček by chtěl děda od babky?

Kolika jablíček zůstalo babce a kolik dědovi, když se o ně rozdělili?

Je pravda, že pak jablíček měli oba stejně?

Co by mohl děda udělat, aby dostal od babky jedno jablíčko?

Co myslíš, rozdělila se babička s dědou?

Co by se asi stalo, kdyby se babička s dědou nerozdělila?

Zeptejte se dítěte, co babička myslela tím, že si s dědou dupne.

Co je jupka, mazurka?

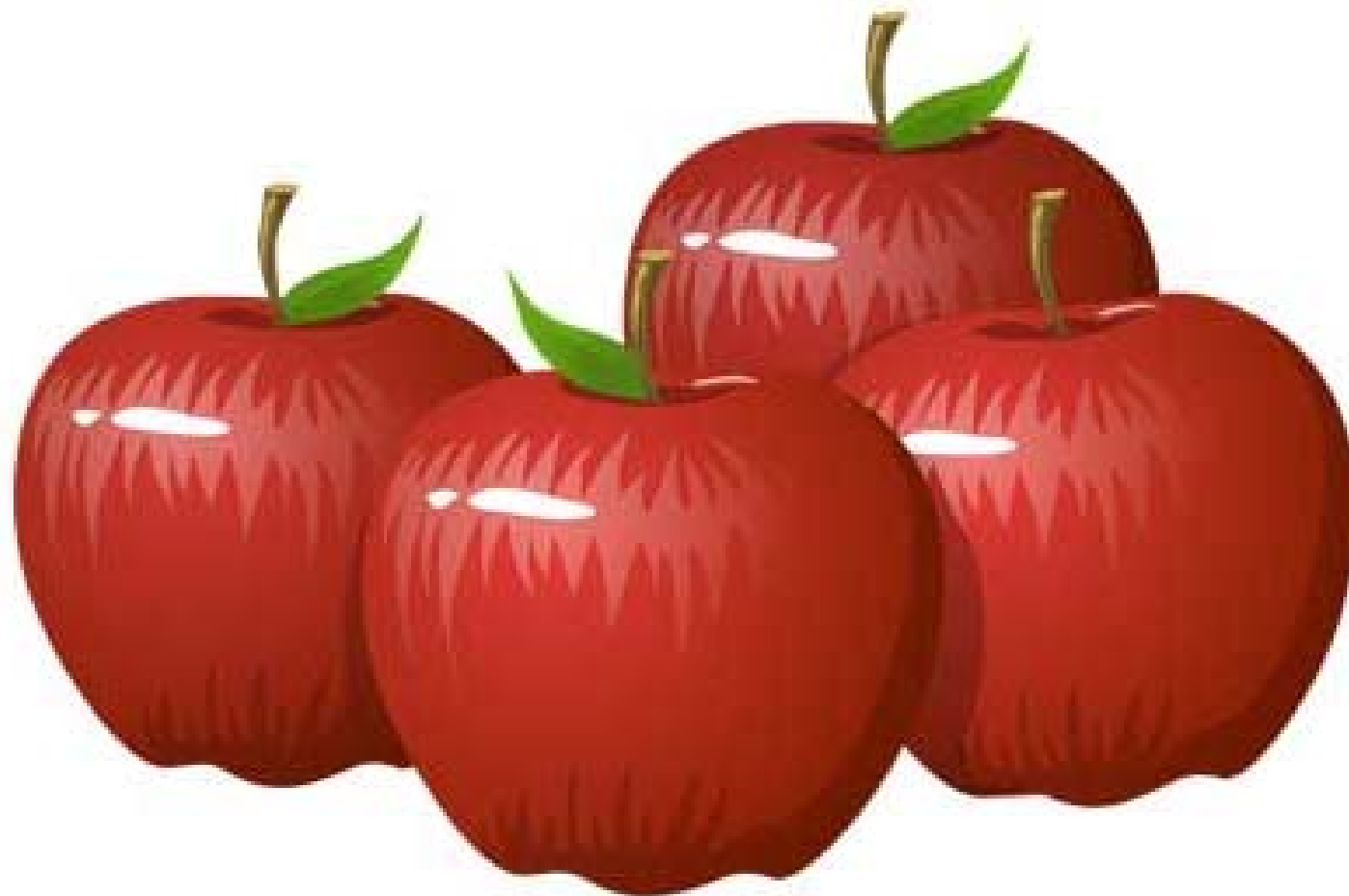
Matematik

- větší číslo, menší číslo
- rovnost dvou čísel
- dělení na dvě stejné/rozdílné části
- půlení

Didaktik matematiky

- *atomární analýza* (spravedlivé rozdělení lichého čísla)
 - „vědecká práce“ může být napsána i na úplné blbosti
- matematicky úloha nezajímavá

Jdeme od toho, kdo se chce ještě dnes o něco dělit!!



Měla babka, čtyři jabka ...

II. Adam, Eva, had a jablko

- **Eva**

- zvědavá žena, šmejdila po celém *Ráji*, mapovala vše, hledala pěkné a zajímavé (netradiční a zakázané) věci, ...
- „našla“ *Strom poznání*
- prý byla svedena hadem k ochutnání jablka
 - měla hlad (?)
 - chtěla vše poznat a pochopit (?)
 - chtěla se stát rovna Bohu (?) ...
- utrhla jablko a přesvědčila Adama, aby ochutnal jako první!!!!



- vyhnání z **Ráje** ...
a ty následky ...

Bible, kniha všech knih

- ale co s úlohou, když
tam není zadání, které
se dá matematizovat

Matematik

– naprosto nezajímavé

Jdeme od toho!!!

Lucas Cranach, starší (1473–1553), *Adam a Eva*, 1537, Národní galerie v Praze



Raději mě nežer, co když jsem z *Ráje* ...

III. Paridův soud

Paris

- syn posledního trójského krále **Priama** a jeho manželky **Hekabé**, frýžské princezny (mnoho synů a dcer)
- trójský princ a klíčová postava pro vypuknutí trójské války
- smutné mládí
- před jeho narozením měla matka sen, že syn bude zkázou země
- sestra (věstkyně **Kassandra**) předpověděla, že bude zkázou města
- z rozhodnutí krále pohozen na svazích hory Ídy
- přežil díky medvědici, nymfě **Oinóné** a pastýři **Ageláovi**

Ale

- nenaučil se zvykům lepší společnosti
- neuměl matematiku
- a to byla velká historická chyba!!!!!!

- **svatba bohyně Thetis a člověka (král Péleus) (synem byl Achilles)**
 - **pozvání všichni bohové až na bohyni sváru Eris**
 - **pomsta „všem“, ze zahrady Hesperidek utrhla zlaté jablko**
 - **nápis „Té nejkrásnější“**
 - **hodila mezi bohyně Athénu, Hérů a Afroditu**
 - **a nastal boj ...**
 - **prvním soudcem měl být sám Zeus**
 - **moudrý muž, věděl, že to není možné vyřešit (znal ženy, znal matematiku ...)**
 - **povolal Herma, dal mu jablko a poslal ho na horu Ídu za Paridem, který ještě nepoznal žádnou ženu ...**
 - **měl mít schopnost spor *spravedlivě* rozsoudit**

Paris

- chtěl uprchnout, ale nebylo kam (příkré svahy hor a péče o stáda ovcí)
- bohyně ho obklopily, švitořily, naléhaly a slibovaly ...

Héra (Diova manželka, patronka manželství a rození)

- vláda nad Asií

Athéna (bohyně moudrosti)

- sláva a vítězství v každé válce

Afrodité (bohyně lásky, plodnosti, sexu)

- nejkrásnější ženu za manželku

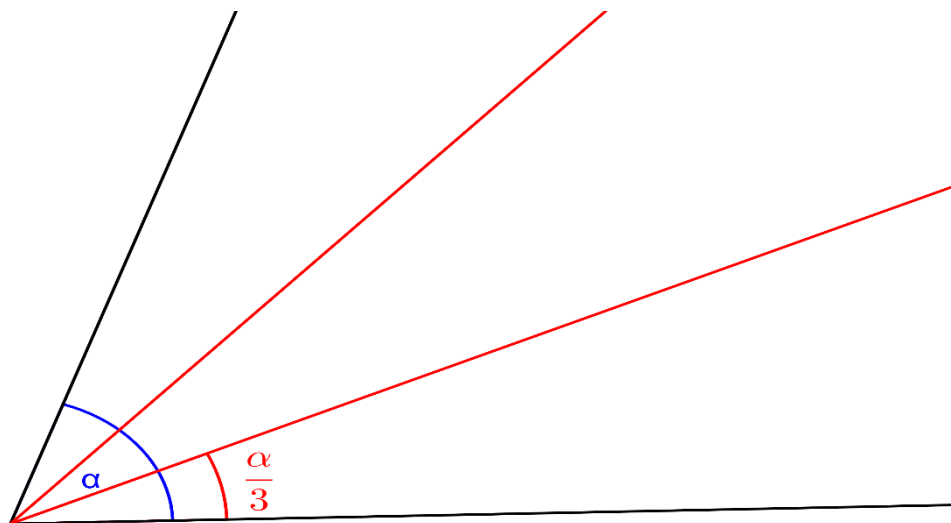
- spartská **Helena**, žena krále **Meneláa**
- seznámení, zamilování ...
- únos (útěk) do Tróje
- reakce Řeků
- trojská válka

→ zkáza Tróje ...



Matematický komentář

- rychle pryč od tohoto problému, protože ...
- *trisekce jablka* (vyhnout problému se ženami)
- *trisekce úhlu*, jedna z klasických úloh starověku
- eukleidovsky rozdělit úhel na tři stejné části
(kružítko a pravítko, konečný počet kroků)
- žádný praktický význam, význam na rozvoj matematiky
- po staletí hledány různé metody, přibližná řešení ...



Algebraizace problému

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha/3 - 3 \cos \alpha/3.$$

Pro vhodně zvolené α je tato kubická rovnice nad racionálními čísly nerozložitelná, a protože nemá stupeň 2^k , nejsou kořeny konstruovatelné pravítkem a kružítkem.

Vezměme úhel $\alpha = 60^\circ$, potom $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Dosadíme-li do naší rovnice

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha/3 - 3 \cos \alpha/3,$$

obdržíme kubickou rovnici ($x = \cos \alpha/3$)

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \quad \text{neboli} \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Hledáme její řešení v intervalu $(-1,1)$.

Jediní kandidáti na racionální kořeny jsou čísla ± 1 , $\pm 1/2$, $\pm 1/4$, $\pm 1/8$ (čitatel je dělitel 1, jmenovatelé jsou dělitelé 8).

Snadno pouhým dosazením do rovnice lze ukázat, že žádný z kandidátů není jejím řešením.

- **1837 Pierre Laurent Wantzel (1814–1848)**
 - dokázal, že úloha je eukleidovsky neřešitelná
 - **Dnes víme, že „třetiče“ (trisektora) nebrat!!!!!!**



Pojďme na něco matematicky zajímavějšího!

IV. Matematická úloha jako příběh

Métrodóros (4. století)

- nepříliš známý řecký autor, který žil v Byzanci
- asi autor epigramů s matematickou tematikou, které jsou součástí tzv. *Anthologia Palatina*
- největší sbírka řeckých epigramů (15 knih)
- rukopis *Bibliotheca Palatina* (Heidelberg)
- sestaven z menších sbírek (1. stol. př. n. l. až 9. stol. n. l.)

epigram

- původně veršovaný nápis na hrobu nebo „věnovací“ kartičce
- později samostatné literární dílo (satirická poezie)

EPIGRAMMATUM ANTHOLOGIA PALATINA

CUM PLANUDEIS ET APPENDICE NOVA

EPIGRAMMATUM VETERUM EX LIBRIS ET MARMORIBUS

DUCTORUM,

ANNOTATIONE INEDITA BOISSONNADII,
CHARDONIS DE LA ROCHETTE, BOTHII, PARTIM INEDITA JACOBSII,
METRICA VERSIONE HUGONIS GROTTI, APPARATU CRITICO

ET BREVI COMMENTARIS INSTRUIT

FRED. DÜBNER.

GRÆCE ET LATINE.

VOLUMEN PRIMUM.



PARISIIS,
EDITORE AMBROSIO FIRMIN-DIDOT,
INSTITUTI FRANCICI TYPOGRAPHO,
VIA JACOB, 56.
M DCCC LXXI.

14. kniha (rukopis v Paříži)

- obsahuje epigramy $\approx$ početní úlohy a hádanky
- matematicky jednoduché (počítání se zlomky, rozdělování majetku, stanovení vzdálenosti, společná práce, směšovací počet)
- pestrý a květnatý jazyk
- pro porozumění je dobré (je nutné) znát antické reálie
- část úloh byla publikována jako příloha k 1. vydání *Diofantovy Aritmetiky* [C. G. Bachet de Méziriac (1587–1638)]
- 45 úloh z antologie

- **3. úloha**

*Jednou se zeptala Kypris Erota, který k ní přišel sklíčený:
Jaký zármutek tě trápí, mé dítě?*

*On odpověděl: Právě jsem přicházel z Helikonu, obtížen
jablky, ale ta mi ukradly múzy a pak uprchly. Kleio mi
vzala pětinu, Euterpe dvanáctinu jablek; dále osminu
Thaleia, ta vznešená, dvacetinu pak ještě sebrala
Meplomene, Terpsichore mi ukradla čtvrtinu a Erato
zchopila jako svůj díl sedminu. Polyhymnia mi ukradla
třicet jablek, sto dvacet potom Urania, s těžkým nákladem
se odplížila pryč Kalliope s třemi sty jablky. A tak jsem teď
přišel domů k tobě – pohled’ – s lehkýma rukama; bohyně
mi nechaly jen pouhých padesát jablek.*

([Ma], str. 45–46)

Historický komentář

Kypris – bohyně Afrodite (její „příjmení“ podle ostrova Kypr, který si zvolila za své sídlo)

Eros – bůh lásky (syn Afrodity)

Kleio – pečuje o historii

Euterpe – o hudbu (tzv. lyrické básnictví)

Thaleia – o komedii (označována jako vznešená)

Melpomene – o tragédii

Terpsichore – o tanec

Erato – o milostnou poezii

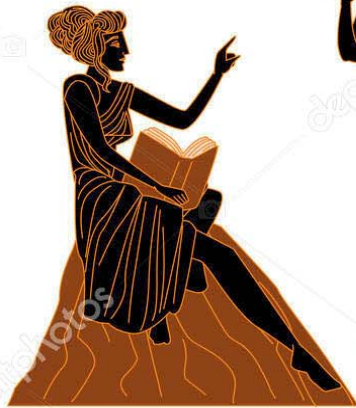
Polyhymnia – o vážnou hudbu (tzv. hymnické básnictví)

Urania – o vědy (zejména astronomii)

Kalliope – o epické zpěvy (a také vědu)

Praktická poznámka: Múzy kradou úplně všechny!!!!

CLIO



EUTERPE



THALIA MELPOMENE



TERPSICHORE



ERATO



POLYMNIA



OURANIA



CALLIOPE



Matematický komentář

x ... počet jablek

$$x - 1/5 \cdot x - 1/12 \cdot x - 1/8 \cdot x - 1/20 \cdot x - 1/4 \cdot x \\ - 1/7 \cdot x - 30 - 120 - 300 = 50$$

$$25/168 \cdot x = 500$$

$$x = 3360$$

Euterpe 280 jablek, *Kleio* 672 jablek, *Thaleia* 420 jablek, *Melpomene* 168 jablek, *Terpsichore* 840 jablek, *Erato* 480 jablek, *Polyhymnia* 30 jablek, *Urania* 120 jablek a *Kalliope* 300 jablek.

- slovní úloha vedoucí na rovnici o jedné neznámé
- počítání s kmennými zlomky
- nevíme, jak postupovali při práci se zlomky
- určitě nesestavovali rovnici
- asi počítali „od konce“, tj. od výsledku



Eros musel být pěkný silák!!!!

- podle odrůdy 7 až 10 jablek na 1 kg
- nesl tedy cca 300 až 350 kg
- proto nemohl ani uletět a ani utíkat (a byl okraden)
- nést takový náklad by byl problém pro **Herkula** i **Atlase**



Zkuste vypočítat, kolik takových sudů Eros nesl.

- **48. úloha**

Charitky jednou nesly koše s jablky a v každém byl stejný počet jablek. Potkalo je devět múz a prosily o ovoce. Daly tedy každé, takže každá z oněch devíti i z oněch tří pak měly stejně. Řekni, kolik rozdělily, že všechny měly tentýž počet.

([Ma], str. 46)

Je zadání srozumitelné?

Je zadání úplné?

Je nutné nějaké vysvětlení?

Historický komentář

- *Charitky* (v římské mytologii *Grácie*)
 - tři *Diovy* dcery, bohyně půvabu, krásy a veselí



Matematický komentář

x ... počet jablek u každé Charitky

y ... počet jablek u každé múzy, resp. Charitky po dělení

$$3x = 9y + 3y = 12y$$

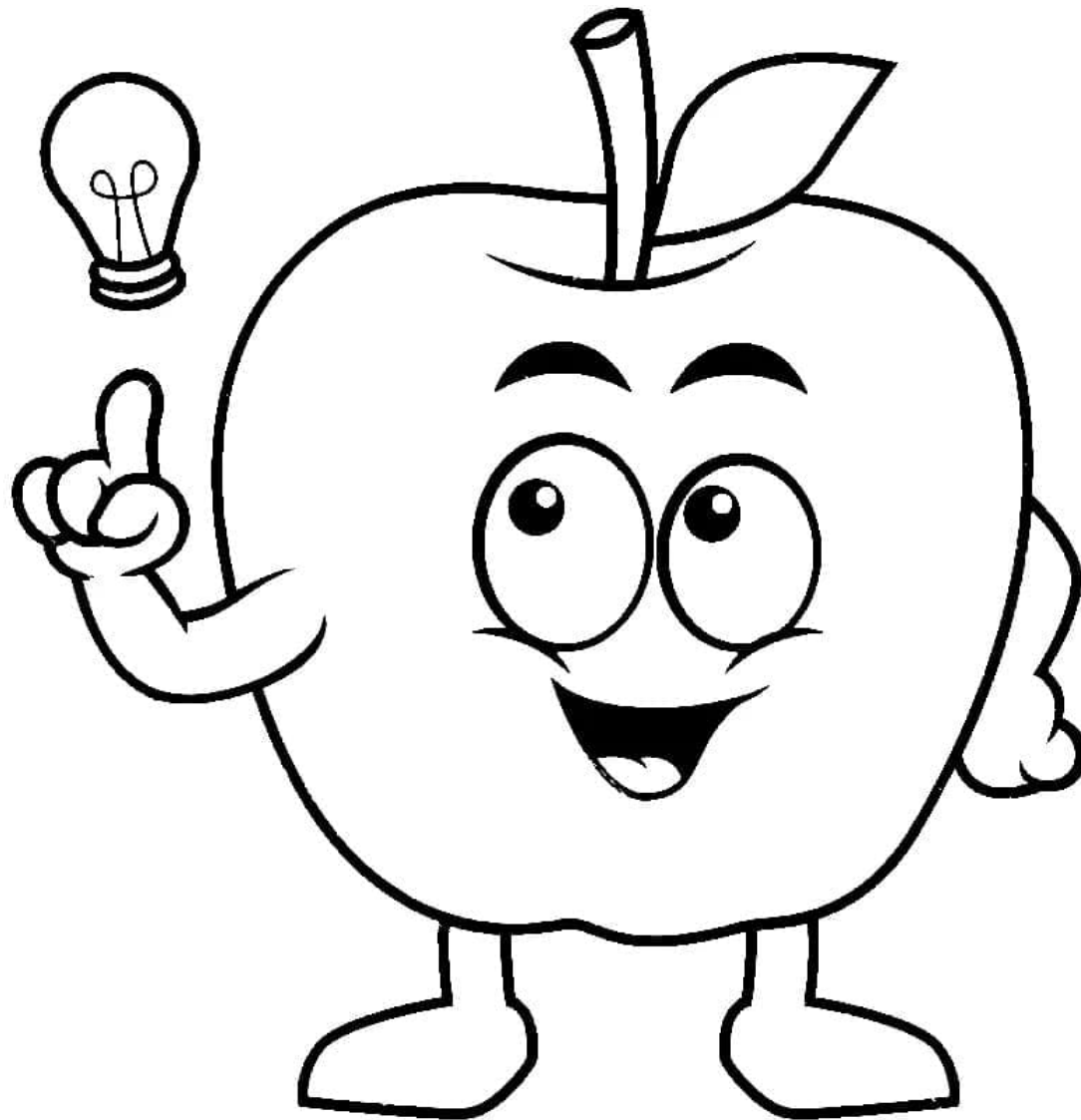
x = 4y, kde $3x \geq 12$ (jablek musí být alespoň 12), y je přirozené číslo

Neobvyklé, úloha má nekonečně mnoho řešení!!

Úloze v originále chybí řešení (ponecháno na diskusi).

Anthologia Palatina

- obtížné porozumění textu
- matematická úloha je zadána jako literární příběh (historické souvislosti, poučení, pobavení)
- sčítání, odčítání, násobení a dělení
- metoda chybného předpokladu, trojčlenka
- práce se zlomky



Pojďme raději na něco ještě „sofistikovanějšího“!!!

V. Luca Pacioli (asi 1445 až 1517)

- italský renesanční matematik, františkán
- univerzitní profesor, překladatel, autor učebnic a spisů

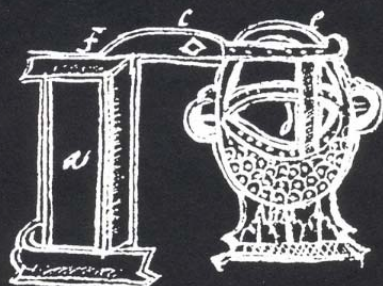


Dílo

- *Tractatus Mathematicus ad Discipulos Perusinos*
(80. léta 15. století), učebnice aritmetiky
- *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (tisk 1494, 1523), 600 stran, dobová encyklopedie matematiky
- komentovaný překlad *Eukleidových Základů*
(tisk 1509)
- *De divina proportione* (tisk 1509), geometrie, filozofie ...
- *De viribus quantitatis* (rukopis, mezi 1496 až 1508)
- *De ludo scacchorum*
(rukopis, mezi 1496 až 1508), šachy

LUCA PACIOLI

DE VIRIBUS QUANTITATIS



C Ap^l LxLv. Do. fare stare uno sechio pieno qua
tùch grande attaccato a uno coltello in taula:~



Aboca
EDIZIONI

FURIO HONSELL

GIORGIO T. BAGNI

DE VIRIBUS QUANTITATIS
CURIOSITÀ E DIVERTIMENTI



Aboca
EDIZIONI

De Viribus Quantitatis (O síle čísel)

- sbírka pro tříbení rozumu, vzdělávání a zábavu**
- výklad obtížných partií na zábavných příkladech**
- řešení úloh a návody na tvorbu pěkných úloh**
- jedna z prvních prací s rekreační matematikou**

67. příklad – „kokosová“ úloha

Služebník byl poslán do zahrady, aby přinesl pánovi „n“ jablek. Při cestě zpět prochází přes „q“ bran. Na každé bráně musí zaplatit clo („r-tinu“ přinášeného zboží). Na konec musí ještě oddělit za každou bránu „k“ jablek. Kolik musí vzít v zahradě jablek, aby splnil pánovo přání?

Poznámka:

- Toto je samozřejmě moderní matematizovaná formulace úlohy.



Jak to tedy s jablky bude?

Matematizace problému

– složené „odúrokování“

x ... počet jablek na počátku akce

q ... počet bran

n ... počet pánem požadovaných jablek

k ... pevné „výpalné“ na bráně

1/r ... mýtné na bráně („clo“, „daň“)

$$x \cdot (1 - 1/r)^q - q \cdot k = n$$

– řešení vede na jednoduchou lineární rovnici

Pacioli uvádí dva případy.

1. Pacioliho případ

Pán požaduje 1 jablko, sluha prochází přes 3 brány a „daň“ je 1 jablko za každou bránu, clo je $\frac{1}{2}$ nákladu.

$$x \cdot (1/2)^3 - 3 \cdot 1 = 1 \quad x = 32 \text{ jablek}$$

1. brána --- má 32 jablek, 16 dá jako clo
2. brána --- má 16 jablek, 8 dá jako clo
3. brána --- má 8 jablek, 4 dá jako clo a 3 dá jako pevnou „daň“

→ Pán dostane 1 žádané jablko.

2. Pacioliho případ

Pán požaduje 1 jablko, sluha prochází přes 5 bran a „daň“ je 1 jablko za každou bránu, clo je $\frac{1}{2}$ nákladu.

$$x \cdot (1/2)^5 - 5 \cdot 1 = 1 \quad x = 192 \text{ jablek}$$

1. brána --- má 192 jablek, 96 dá jako clo
2. brána --- má 96 jablek, 48 dá jako clo
3. brána --- má 48 jablek, 24 dá jako clo
4. brána --- má 24 jablek, 12 dá jako clo
5. brána --- má 12 jablek, 6 dá jako clo a 5 dá jako pevnou „daň“

→ Pán dostane 1 žádané jablko.

- Pacioli neřeší žádnou rovnici
- ani ji nesestavuje, jde tzv. od konce a uvažuje takto

- $1 + 3 = 4$ $2 \times 4 \rightarrow 8$ (třetí brána)
 $2 \times 8 \rightarrow 16$ (druhá brána)
 $2 \times 16 \rightarrow 32$ (první brána)
- $1 + 5 = 6$ $2 \times 6 \rightarrow 12$ (pátá brána)
 $2 \times 12 \rightarrow 24$ (čtvrtá brána)
 $2 \times 24 \rightarrow 48$ (třetí brána)
 $2 \times 48 \rightarrow 96$ (druhá brána)
 $2 \times 96 \rightarrow 192$ (první brána)

Historický komentář

- pán žádá jablka, která byla oblíbenou pochoutkou
- pravděpodobně se jednalo o **granátové jablko**
- úloha se objevuje i v Asii, zde je žádán **kokosový ořech** (osvěžující šťáva)

Matematický komentář

- základ finanční aritmetiky
- triviální umořování dluhu

Obecný komentář

- roztomilá i směšná úloha o jablcích
- kritika rozmařilosti panstva
- pozor na daně, cla, přeprodávání zboží, narůstání cen ...

Je to jen ptákovina?

- není, je to každodenní realita našich životů
- stačí jen vhodně přeformulovat text, dodat aktuální slovní komentáře a rozumné soudobé číselné údaje

Jablko = stavební materiál

Brány = suroviny, zpracování, výroba, dovoz, odvoz a likvidace odpadu ...

Clo = DPH (máme „jen“ 21%, Pacioli má 50%)

Pevná daň na bránu = různé poplatky, různé povolenky, úřední poplatky za rozhodnutí, „všimné“ úředníkovi, platba dozoru, plat pracovníků ...

... už se nesmějme, protože takto se stanovují náklady ...

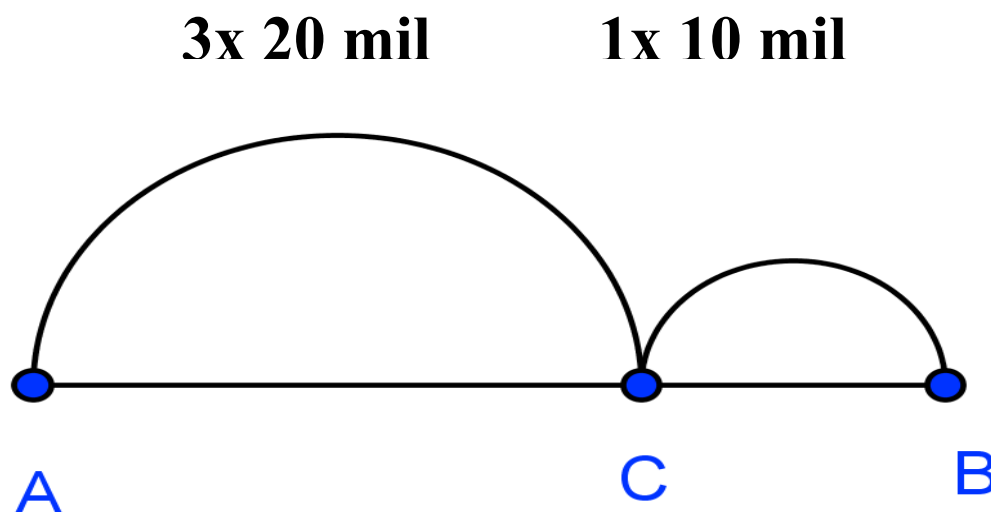
49. příklad – „úloha o džípu“

Jeden občan Borga má 90 jablek, které mají být doručeny jeho příteli do Perugia (30 mil vzdálené). Je najmut nosič, který unese pouze 30 jablek a pokud jde s nákladem, spotřebuje 1 jablko na 1 míli. Jak to udělat, aby donesl příteli v Perugii maximum jablek?
(49. příklad)



Luca Pacioli uvádí dvě řešení

1. Pacioliho řešení



90 jablek 3 x 20 jab. 30 jab. 1 x 30 jab. 20 jablek

vyrazí se 30 jablky, ujde 20 mil, sní 20 jablek, v místě C nechá 10 jablek a vrátí se zpět, zopakuje ještě 2x, při třetí cestě se dostane do bodu C, kde má 30 jablek, vezme je a vyrazí do cíle, který je vzdálen 10 mil. Na cestu potřebuje 10 jablek, do cíle přinese 20 jablek (sní 70, přinese 20!!!)

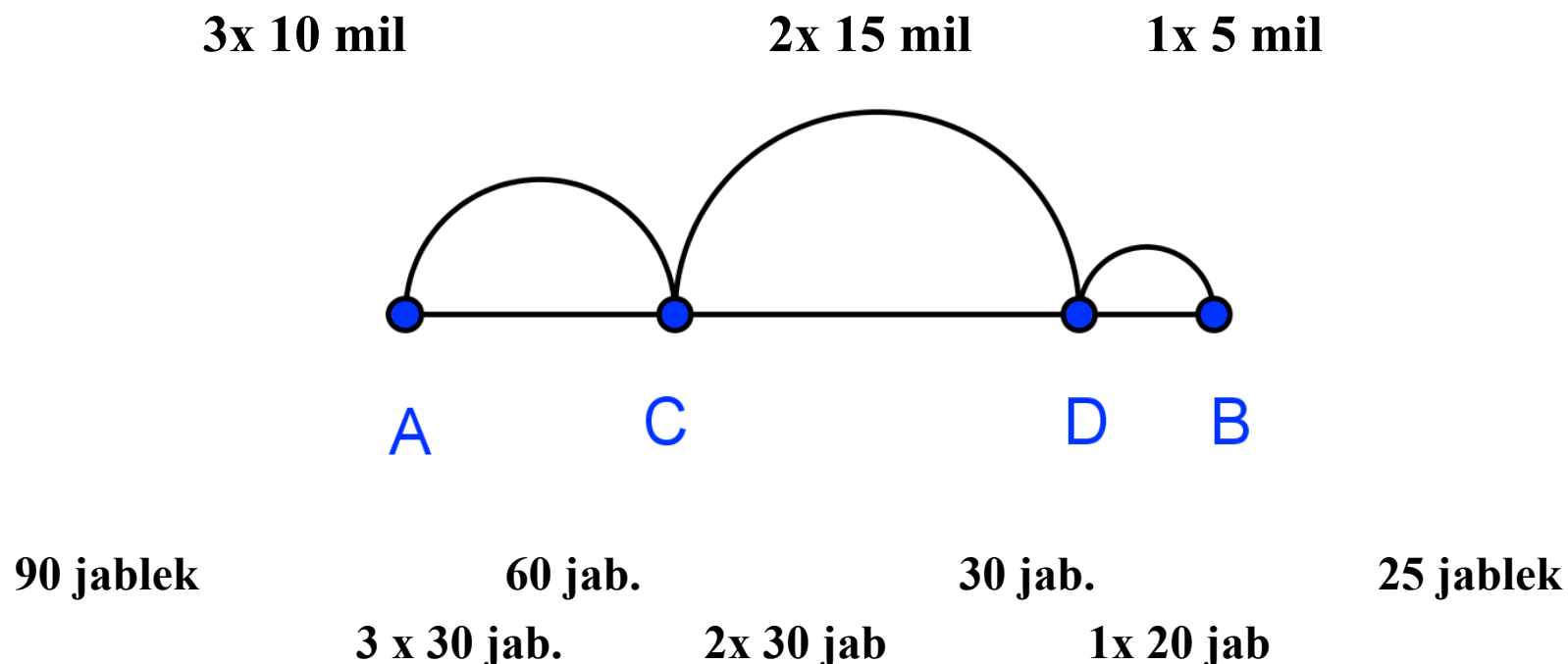
Poznámka

- nosič sní 70 jablek
- dodá 20 jablek
- urazí 110 mil (70 s nákladem, 40 bez nákladu)
- na počátku nese maximum jablek, snaží se jít daleko, ale méně než 30 mil, jinak by vše snědl

Pacioli neuvádí toto optimální ekvivalentní řešení:

- 30 jablek, 10 mil (3x), sní 30 jablek, donese 60,
- 30 jablek, 20 mil (2x), sní 40 jablek, do cíle donese 20
- ujde 110 mil (70 s nákladem, 40 bez nákladu)

2. Pacioliho řešení



vyrazí se 30 jablky, ujde 10 mil, sní 10 jablek, v místě C nechá 20 jablek a vrátí se zpět, zopakuje ještě 2x, při třetí cestě se dostane do bodu C, kde má 60 jablek, vezme 30 jablek a dojde do bodu D, který je vzdálen 15 mil, sní 15 jablek, v bodě D nechá 15 jablek a vrátí se zpět do C, cestu zopakuje ještě jednou. V bodě D má nyní 30 jablek, vezme je a vyrazí do cíle, který je vzdálen 5 mil. Při cestě sní 5 jablek, do cíle přinese 25 jablek (sní 65, přinese 25!!!)

Poznámka

- nosič sní 65 jablek
- dodá 25 jablek
- urazí 100 mil (65 s nákladem, 35 bez nákladu)

Pacioli neuvádí toto optimální neekvivalentní řešení:

- 30 jablek, 5 mil (3x), sní 15 jablek, donese 75,
- 5 mil (3x), sní 15 jablek, donese 60,
- 5 mil (2x), sní 10 jablek, donese 50,
- 5 mil (2x), sní 10 jablek, donese 40,
- 5 mil (2x), sní 10 jablek, donese 30,
- 5 mil (1x), sní 5 jablek, donese do cíle 25.
- ujde 100 mil (65 s nákladem, 35 bez nákladu)

Pacioli

- **neuvádí „špatné“ varianty**
- **neuvádí, jak optimalizaci najít!!!!**
- **neuvádí, že optimalizací může být více**
- **„klíčové“ body jsou u něho mosty, brody, města ...**

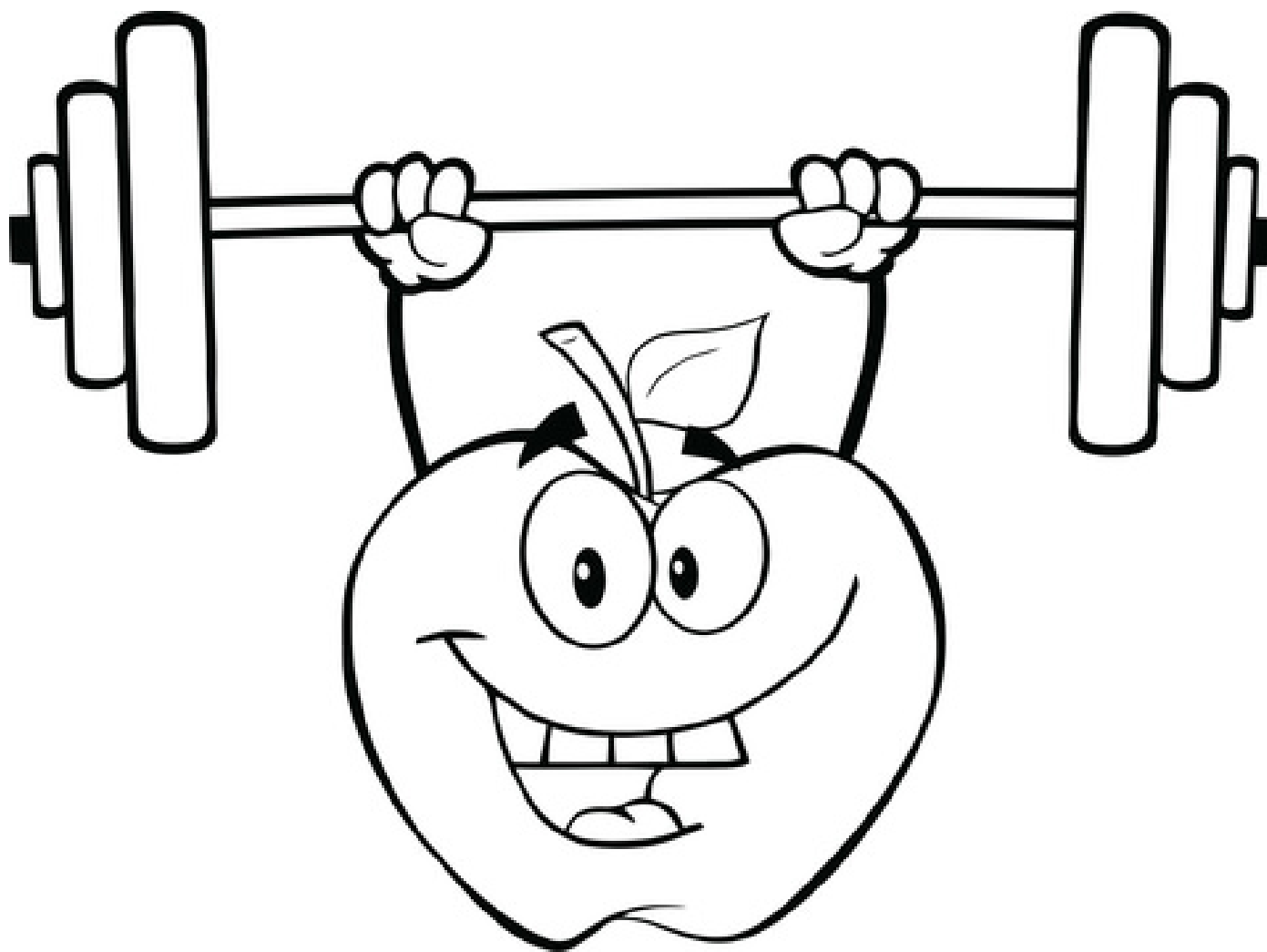
Závěr

- **Volte lepšího nosiče!!!**
- **Přemýšlejte nad přepravními podmínkami!!!!**



Komentář k matematice

- obdobné úlohy se označují jako „**úlohy o džípu, o poušti**“
- ***optimalizační úlohy*** (vojenská strategie)
 - rozvoz paliva, rozmístění zásobníků
 - přechod pouště (rozmístění zásob vody a jídla, rozmístění stanic velbloudů ... již **Alkuin** v 9. stol., ***Úlohy pro bystření rozumu jinochů***)
 - větší spotřeba při zátěži, menší bez zátěže
 - testování vojenských plánovačů, manažerů ...
 - reálnější podmínky



Uf, co s tím budeme dělat??????

Skutečná matematizace

- M. Gardner: *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, Simon and Schuster, New York, 1961, str. 152, 157–159.
- **Jeep Problem** (WolframMathWorld) – **překonání pouště**

Maximalizujte vzdálenost, kterou může džíp proniknout do pouště s použitím daného množství paliva na základně. Džípu je dovoleno jet vpřed, vyložit trochu paliva a poté se vrátit na základnu s využitím zbývajícího paliva v nádrži. Na základně může doplnit palivo a znovu vyrazit. Když dosáhne zásobníku paliva, které předtím vytvořil, může je použít k částečnému nebo úplnému naplnění nádrže.

(Ball a Coxeter, 1987)

Příklad: džíp, 1 sud paliva na 1 míli.

Jeden sud na základně

- džíp jede na doraz nádrže, urazí **1 míli**, v nádrži má **0**.

Dva sudy na základně

- 1. sud, džíp ujede $\frac{1}{3}$ míle, v zásobníku uskladní $\frac{1}{3}$ jednotky paliva, vrátí se na základnu a vyčerpá $\frac{1}{3}$ jednotky paliva, v nádrži má na základně **0 jednotek paliva a sklad s $\frac{1}{3}$ jednotky paliva ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ míle od základny.**
- 2. sud, džíp ujede $\frac{1}{3}$ míle, spotřeboval $\frac{1}{3}$ jednotky paliva, do nádrže přečerpá $\frac{1}{3}$ jednotky palivo ze zásobníku, má plnou nádrž a prázdný zásobník, může na ujet 1 míli. Celkem ujede $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ míle, v nádrži a zásobníku má **0 jednotek paliva.**

Tři sudy na základně

- 1. sud, džíp ujede $\frac{1}{5}$ míle, v zásobníku uskladní $\frac{3}{5}$ jednotek paliva, vrátí se na základnu, ujede $\frac{1}{5}$ míle a vyčerpá $\frac{1}{5}$ jednotky paliva, v nádrži na základně má **0 jednotek paliva, sklad s $\frac{3}{5}$ jednotkami paliva má ve vzdálenosti $\frac{1}{5}$ míle od základny.**
- 2. sud, džíp ujede $\frac{1}{5}$ míle, spotřeboval $\frac{1}{5}$ jednotky paliva, do nádrže přečerpá $\frac{1}{5}$ jednotky paliva ze zásobníku, má plnou nádrž a v zásobníku $\frac{2}{5}$ jednotky paliva. Ujede $\frac{1}{3}$ míle, do zásobníku uloží $\frac{1}{3}$ jednotky paliva, obrátí se a jede k prvnímu zásobníku, dráha je $\frac{1}{3}$ míle a v nádrži má $\frac{1}{3}$ jednotky paliva. U prvního zásobníku má v nádrži 0 jednotek paliva, načerpá $\frac{1}{5}$ jednotky paliva, v zásobníku zůstane $\frac{1}{5}$ jednotky paliva a před sebou má $\frac{1}{5}$ míle. Na základně má v **nádrži 0 jednotek paliva, sklad s $\frac{1}{5}$ jednotky paliva ve vzdálenosti $\frac{1}{5}$ míle a sklad s $\frac{1}{3}$ jednotky paliva ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ míle.**

– 3. sud, džíp ujede $\frac{1}{5}$ míle, spotřeboval $\frac{1}{5}$ jednotky paliva, dočerpá $\frac{1}{5}$ jednotky paliva z prvního zásobníku, v zásobníku zůstane 0 jednotek paliva a má plnou nádrž. Vyrazí ke druhému zásobníku, ujede $\frac{1}{3}$ míle, u zásobníku má v nádrži $\frac{2}{3}$ jednotky paliva. Přičerpá $\frac{1}{3}$ jednotky paliva ze zásobníku, v zásobníku má 0 jednotek a má plnou nádrž. Ujede ještě 1 míli. Celkem ujel

$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{23}{15}$, v zásobnících i v nádrži je 0.



Obecná strategie

Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ dostaneme

$$d = 1$$

$$d = 1 + 1/3 = 4/3$$

$$d = 1 + 1/3 + 1/5 = 23/15$$

$$d = 1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 = 176/105$$

$$d = 1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 = 563/315$$

...

$$d = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$$

Závěrečné komentáře

- v každém zásobníku je při poslední cestě právě tolik paliva, aby se jím doplnilo chybějící palivo v nádrži na jednu jednotku
- po opuštění nejvzdálenějšího zásobníku paliva urazí džíp ještě jednou jednotku vzdálenosti
- teoreticky je možné překročit poušť jakékoli velikosti s dostatkem paliva na základně (součet lichých členů harmonické řady)
- množství potřebného paliva a počet zásobníků paliv se exponenciálně zvyšuje s ujetou vzdáleností

V dětství jsme se seznámili také s pohádkou

Sněhurka a sedm trpaslíků,

kde jablko hraje též stěžejní roli, ale matematika je
tam téměř nulová ...



Pěkná literatura

- Ephraim Kishon: *Za všechno může jablko. Návod k upotřebení Desatera*, Odeon, Praha, 1999, 295 stran.
 - satirické povídky o tom, jak jablko otevřelo člověku cestu do světa a k poznání
- Miroslav Horníček: *Jablko je vinno*, 5. vydání, Motto, Praha, 2016, 227 stran.
 - ironický pohled na slavné milenecké dvojice

Děkuji za pozornost.

