Dokonalá čísla, zvláště to páté

Jindřich Bečvář

Katedra didaktiky matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Kalsem, Kouty, 2017

becvar@karlin.mff.cuni.cz
www.karlin.mff.cuni.cz/∼becvar
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm

Osnova

1 Dokonalá čísla

2 Sudá dokonalá čísla

3 Páté dokonalé číslo

4 Další dokonalá čísla

5 Mersennova prvočísla

6 Lichá dokonalá čísla

Dokonalá čísla, Eukleidés

- **Definice.** *Přirozené číslo se nazývá dokonalé, je-li rovno součtu všech svých vlastních dělitelů.*

  Příklady: $6 = 1 + 2 + 3,$ resp. $12 = 1 + 2 + 3 + 6,$

  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$ resp. $56 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$

Dokonalá čísla, Eukleidés

- **Definice.** *Přirozené číslo se nazývá dokonalé, je-li rovno součtu všech svých vlastních dělitelů.*

  Příklady: $6 = 1 + 2 + 3$, resp. $12 = 1 + 2 + 3 + 6$,

  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, resp. $56 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$

- **Věta** (Eukleidés, IX.36). *Je-li číslo $2^p - 1$ prvočíslem, je číslo $2^{p-1}(2^p - 1)$ dokonalé.*

Dokonalá čísla, Eukleidés

- **Definice.** *Přirozené číslo se nazývá dokonalé, je-li rovno součtu všech svých vlastních dělitelů.*

  Příklady: $6 = 1 + 2 + 3$, resp. $12 = 1 + 2 + 3 + 6$,

  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, resp. $56 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$

- **Věta** (Eukleidés, IX.36). *Je-li číslo $2^p - 1$ prvočíslem, je číslo $2^{p-1}(2^p - 1)$ dokonalé.*

  Důkaz. Sečteme všechny vlastní dělitele čísla $2^{p-1}(2^p - 1)$:

  $$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1} +$$
  $$+ (2^p - 1) + 2(2^p - 1) + 2^2(2^p - 1) + \cdots + 2^{p-2}(2^p - 1) =$$
  $$= 2^p - 1 + (2^p - 1)(2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

- *Je-li* $2^p - 1$ *prvočíslo, je* p *prvočíslo.*

- *Je-li $2^p - 1$ prvočíslo, je p prvočíslo.*

  Důkaz. Kdyby $p = mn$, kde $1 < m < p$, potom

$$2^p - 1 = (2^m)^n - 1^n = (2^m - 1)(2^{m(n-1)} + \cdots + 1).$$

- *Je-li $2^p - 1$ prvočíslo, je p prvočíslo.*

  Důkaz. Kdyby $p = mn$, kde $1 < m < p$, potom

  $$2^p - 1 = (2^m)^n - 1^n = (2^m - 1)(2^{m(n-1)} + \cdots + 1).$$

- Pro některá prvočísla p nemusí být $2^p - 1$ prvočíslo.

  Příklad: $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89$

- *Je-li $2^p - 1$ prvočíslo, je p prvočíslo.*

  Důkaz. Kdyby $p = mn$, kde $1 < m < p$, potom

$$2^p - 1 = (2^m)^n - 1^n = (2^m - 1)(2^{m(n-1)} + \cdots + 1).$$

- Pro některá prvočísla p nemusí být $2^p - 1$ prvočíslo.

  Příklad: $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89$

- Podle Eukleidovy věty vznikají první čtyři dokonalá čísla pro $p = 2, 3, 5, 7$:

$$2(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$2^2(2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28,$$

$$2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496,$$

$$2^6(2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8\,128.$$

- *Dokonalá čísla, která vznikají podle Eukleidovy věty, končí cifrou* 6 *nebo* 8.

- *Dokonalá čísla, která vznikají podle Eukleidovy věty, končí cifrou* 6 *nebo* 8.

Důkaz. Mocniny čísla 2 jsou:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024, 2\,048, 4\,096, 8\,192, 16\,384, \ldots$$

Čísla tvaru 2^{4k+1} končí cifrou 2, čísla tvaru 2^{4k+3} cifrou 8,

čísla tvaru 2^{4k} končí cifrou 6, čísla tvaru 2^{4k+2} končí cifrou 4.

Pro liché p tvaru $4k+1$, resp. $4k+3$ čísla tvaru $2^{p-1}(2^p-1)$

končí cifrou 6, neboť $6 \cdot 1 = 6$,

resp. cifrou 8, neboť $4 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{10}$.

Navíc pro $p = 2$ (sudé!) je $2(2^2-1) = 6$.

- *Čísla tvaru $2^{k-1}(2^k-1)$ jsou čísly trojúhelníkovými.*

Důkaz.

$$2^{k-1}(2^k-1) = \frac{1}{2}\cdot 2^k(2^k-1) = 1+2+3+\cdots+(2^k-1)$$

- *Čísla tvaru* $2^{k-1}(2^k-1)$ *jsou čísly trojúhelníkovými.*

  Důkaz.

  $$2^{k-1}(2^k-1) = \frac{1}{2}\cdot 2^k(2^k-1) = 1+2+3+\cdots+(2^k-1)$$

- *Čísla tvaru* $2^{k-1}(2^k-1)$ *mají ve dvojkové soustavě zápis* $1\ldots10\ldots0$, *kde je za sebou* k *jedniček a* $k-1$ *nul.*

- *Čísla tvaru $2^{k-1}(2^k-1)$ jsou čísly trojúhelníkovými.*

  Důkaz.

$$2^{k-1}(2^k-1) = \frac{1}{2}\cdot 2^k(2^k-1) = 1+2+3+\cdots+(2^k-1)$$

- *Čísla tvaru $2^{k-1}(2^k-1)$ mají ve dvojkové soustavě zápis $1\ldots10\ldots0$, kde je za sebou k jedniček a $k-1$ nul.*

  Důkaz. Stačí číslo $2^{k-1}(2^k-1)$ vyjádřit ve tvaru

$$2^{k-1}\left[1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}\right] = 2^{2k-2}+\cdots+2^{k-1}.$$

- *Čísla tvaru* $2^{k-1}(2^k-1)$ *jsou čísly trojúhelníkovými.*

  Důkaz.

$$2^{k-1}(2^k-1) = \frac{1}{2}\cdot 2^k(2^k-1) = 1+2+3+\cdots+(2^k-1)$$

- *Čísla tvaru* $2^{k-1}(2^k-1)$ *mají ve dvojkové soustavě zápis* $1\ldots10\ldots0$, *kde je za sebou* k *jedniček a* $k-1$ *nul.*

  Důkaz. Stačí číslo $2^{k-1}(2^k-1)$ vyjádřit ve tvaru

$$2^{k-1}\left[1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}\right] = 2^{2k-2}+\cdots+2^{k-1}.$$

František Josef Studnička (1836–1903), profesor pražské (české) univerzity

Einige Bemerkungen über die sogenannten euklidischen Zahlen, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1899, č. 30, 1–3.

- *Ciferný součet čísla* $2^{k-1}(2^k-1)$, *kde* k *je liché, je* 1.

- *Ciferný součet čísla* $2^{k-1}(2^k - 1)$, *kde* k *je liché, je* 1.

Důkaz. Liché číslo k má tvar $6k+1$, $6k+3$ nebo $6k+5$.

$2^{6k}(2^{6k+1} - 1) = 64^k(2 \cdot 64^k - 1) \equiv 1{\cdot}(2{\cdot}1 - 1) \equiv 1 \pmod 9$,

resp.

$2^{6k+2}(2^{6k+3} - 1) = 4 \cdot 64^k(8 \cdot 64^k - 1) \equiv 4{\cdot}(-1{\cdot}1 - 1) \equiv 1$,

resp.

$$2^{6k+4}(2^{6k+5} - 1) = 16 \cdot 64^k(32 \cdot 64^k - 1) \equiv$$
$$\equiv (-2) \cdot 1 \cdot [(-4) \cdot 1 - 1] \equiv 1 \pmod 9.$$

Ciferný součet čísla n je roven zbytku při dělení čísla n číslem 9. Pro 6 ($p = 2$) neplatí.

- *Ciferný součet čísla* $2^{k-1}(2^k - 1)$, *kde* k *je liché, je* 1.

  Důkaz. Liché číslo k má tvar $6k+1$, $6k+3$ nebo $6k+5$.

  $$2^{6k}(2^{6k+1} - 1) = 64^k(2 \cdot 64^k - 1) \equiv 1{\cdot}(2{\cdot}1 - 1) \equiv 1 \pmod 9,$$

  resp.

  $$2^{6k+2}(2^{6k+3} - 1) = 4 \cdot 64^k(8 \cdot 64^k - 1) \equiv 4{\cdot}(-1{\cdot}1 - 1) \equiv 1,$$

  resp.

  $$2^{6k+4}(2^{6k+5} - 1) = 16 \cdot 64^k(32 \cdot 64^k - 1) \equiv$$
  $$\equiv (-2) \cdot 1 \cdot [(-4) \cdot 1 - 1] \equiv 1 \pmod 9.$$

  Ciferný součet čísla n je roven zbytku při dělení čísla n číslem 9. Pro 6 ($p = 2$) neplatí.

- Eukleidova věta dává **sudá** dokonalá čísla.

  Až do 18. století nebylo jasné, zda existují **jiná** sudá dokonalá čísla.

Sudá dokonalá čísla, Euler

- **Věta** (Euler). *Každé sudé dokonalé číslo má tvar* $2^{p-1}(2^p - 1)$, *kde* $2^p - 1$ *je prvočíslo.*

Sudá dokonalá čísla, Euler

- **Věta** (Euler). *Každé sudé dokonalé číslo má tvar* $2^{p-1}(2^p - 1)$*, kde* $2^p - 1$ *je prvočíslo.*

  Důkaz. Uvažujme sudé dokonalé číslo $n = 2^{m-1} \cdot q$, kde $m > 1$ a q je liché. Součet **všech** dělitelů čísla n je

  $$2^m \cdot q = (1 + 2 + \cdots + 2^{m-1}) \cdot S,$$

  kde S je součet **všech** dělitelů čísla q. Odtud

  $$2^m \cdot q = (2^m - 1) \cdot S,$$

  proto $S = 2^m \cdot x$. Dále je tedy $q = (2^m - 1) \cdot x$.
  Pokud by bylo $x \neq 1$, byl by součet S **všech** dělitelů čísla q

  $$S = (2^m - 1) \cdot x + (2^m - 1) + x + \cdots + 1 > S = 2^m \cdot x.$$

  Proto je $x = 1$, $S = 2^m$ a $q = 2^m - 1$ je prvočíslo.

- Teprve po Eulerovi bylo jasné, že všechna sudá dokonalá čísla jsou popsána Eukleidovou větou.

- Teprve po Eulerovi bylo jasné, že všechna sudá dokonalá čísla jsou popsána Eukleidovou větou.
- Eulerova věta navíc říká, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi sudými dokonalými čísly a prvočísly tvaru $2^p - 1$.
  - Eukleidés (kolem 300 př. Kr.)
  - Euler (1707–1783)

- Teprve po Eulerovi bylo jasné, že všechna sudá dokonalá čísla jsou popsána Eukleidovou větou.
- Eulerova věta navíc říká, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi sudými dokonalými čísly a prvočísly tvaru $2^p - 1$.
  - Eukleidés (kolem 300 př. Kr.)
  - Euler (1707–1783)
- V mezidobí rozličné úvahy, názory, ...

Páté dokonalé číslo

- Staří Řekové znali dokonalá čísla 6, 28, 496, 8 128 $(p = 2, 3, 5, 7)$
- Číslo 9 není prvočíslo.
- Pro $p = 11$ není $2^p - 1$ prvočíslo.

Páté dokonalé číslo

- Staří Řekové znali dokonalá čísla 6, 28, 496, 8 128
  $(p = 2, 3, 5, 7)$
- Číslo 9 není prvočíslo.
- Pro $p = 11$ není $2^p - 1$ prvočíslo.
- Pro $p = 13$ je $2^p - 1 = 2^{13} - 1 = 8\,191$ prvočíslo,
  a tedy pátým dokonalým číslem je

  $$2^{12}(2^{13} - 1) = 4\,096 \cdot 8\,191 = 335\,503\,336.$$

  Proč k němu nedospěli Řekové? Stačilo prověřit, že 8 191 je prvočíslo a vypočítat součin $4\,096 \cdot 8\,191$.

  – velká čísla, výpočty

  – pocit, že musí existovat „menší“ dokonalé číslo, patrně pěticiferné . . .

- Nikomachos z Gerasy (asi 60 až 120): *Úvod do aritmetiky*
  - čtyři dokonalá čísla: 6, 28, 496, 8128
  - leží v intervalech 1, 10, 100, 1 000, 10 000
    (mají tedy jednu, dvě, tři, čtyři cifry)
  - všechna dokonalá čísla jsou popsána Eukleidovou větou
    (a jsou tedy sudá) [Předjímá skutečnost!]
  - každé dokonalé číslo končí na cifru 6 nebo 8
    a ty se pravidelně střídají [Pravda jen částečně!]

- Nikomachos z Gerasy (asi 60 až 120): *Úvod do aritmetiky*
  - čtyři dokonalá čísla: 6, 28, 496, 8128
  - leží v intervalech 1, 10, 100, 1 000, 10 000

    (mají tedy jednu, dvě, tři, čtyři cifry)
  - všechna dokonalá čísla jsou popsána Eukleidovou větou

    (a jsou tedy sudá) [Předjímá skutečnost!]
  - každé dokonalé číslo končí na cifru 6 nebo 8

    a ty se pravidelně střídají [Pravda jen částečně!]
- Iamblichos z Chalkidy (asi 285 až 330):

  komentáře k Nikomachovi
  - mezi každými dvěma čísly 10^n a 10^{n+1} je právě jedno

    dokonalé číslo (má $n+1$ cifer)

- Nikomachos z Gerasy (asi 60 až 120): *Úvod do aritmetiky*
  – čtyři dokonalá čísla: 6, 28, 496, 8128
  – leží v intervalech 1, 10, 100, 1 000, 10 000
  (mají tedy jednu, dvě, tři, čtyři cifry)
  – všechna dokonalá čísla jsou popsána Eukleidovou větou
  (a jsou tedy sudá) [Předjímá skutečnost!]
  – každé dokonalé číslo končí na cifru 6 nebo 8
  a ty se pravidelně střídají [Pravda jen částečně!]
- Iamblichos z Chalkidy (asi 285 až 330):
  komentáře k Nikomachovi
  – mezi každými dvěma čísly 10^n a 10^{n+1} je právě jedno
  dokonalé číslo (má $n + 1$ cifer)

Neúplná indukce!!!

- Filón z Alexandrie (asi 20 př. Kr. až 50 po Kr.)
  – helénsko-židovský platonský filozof
  – za 6 dnů byl stvořen svět, Měsíc obíhá Zemi za 28 dnů
- Órigenés (asi 184 až 253)
  – řecký církevní učitel a teolog
- Didymos Alexandrijský (též Slepý, asi 310/13 až 398)
  – křesťanský teolog
  – jsou jen čtyři dokonalá čísla menší než 10 000
- Sv. Augustin (354–430)
  – *De civitate Dei* (O Boží obci)
  – dokonalost čísla 6 v souvislosti s počtem dnů stvoření světa

- Thabit ibn Qurra (asi 826/36 až 901)
  - arabský astronom, matematik, fyzik a lékař
  - překladatel řeckých textů (Eukleidés, Archimédés, (Eukleidés, Archimédés, Apollonios, Ptolemaios)
  - věnoval se číslům tvaru $2^n p$, kde p je prvočíslo, některá mohou být dokonalá

- Thabit ibn Qurra (asi 826/36 až 901)
  - arabský astronom, matematik, fyzik a lékař
  - překladatel řeckých textů (Eukleidés, Archimédés,
    (Eukleidés, Archimédés, Apollonios, Ptolemaios)
  - věnoval se číslům tvaru $2^n p$, kde p je prvočíslo,
    některá mohou být dokonalá

- Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (Alhazen, asi 965 až 1040)
  - arabský matematik, fyzik a astronom
  - *Analýza a syntéza*
  - předjímal tvrzení Eulerovy věty o sudých dokonalých číslech

- Ismail ibn Fallus (asi 1194 až 1239/52)
  - deset čísel, o kterých tvrdil, že jsou dokonalá
  - sedm správně (2,3,5,7,13,17,19), tři nikoliv (9,11,23)
  - správně vyloučil 15 a 21

$$335\,503\,336, \qquad 8\,589\,869\,056, \qquad 137\,438\,691\,328$$

- ad-Din as-Sirazi
  - *Encyklopedie* (1292 až 1306)
  - šest dokonalých čísel

- Nyní mohlo být do jisté míry zpochybněno tvrzení, že cifry 6 a 8 se v dekadickém vyjádření pravidelně střídají.

  Výsledky Ismaila ibn Falluse však v Evropě nebyly známé.

- M. Curtze v letech 1895, 1899:

  - Codex Latinus Monacensis 14908 (z roku 1456)

  – neznámý autor (Friedrich?)

  – pět dokonalých čísel: páté dokonalé číslo!

  - Codex Vindobonensis 5203 (kolem roku 1461)

  – autor Johannes Müller (1436–1476)

  (Johannes de Regio Monte, Regiomontanus)

  – německý matematik a astronom

  – pět dokonalých čísel: páté dokonalé číslo!

- Ettore Picutti roku 1989:

  - Codice Palatino 573 (z roku 1458)
  – Biblioteca Nazionale di Firenze
  – *Trattato di praticha d'arismetricha*
  – přepis staršího traktátu téhož autora
  – neznámý autor z Florencie, významný autor
  – jeho učitel: Domenico d'Agostino
  – pět dokonalých čísel (fol. 28r)

  - Codex Ottobonianus Latinus 3307,
  – Biblioteca Apostolica Vaticana (1460)
  – stejný autor
  – šest dokonalých čísel (fol. 24r)

- Objev pátého dokonalého čísla datujeme rokem 1456

  Evropská namyšlenost!

- Tento výsledek však nedošel rozšíření,

  ještě poměrně dlouho se objevují chybné úvahy.

- Jacques Lefèvre (1455–1537)

  – 1496: Eukleidův předpis pro tvorbu dokonalých čísel dává všechna dokonalá čísla

- Luca Pacioli (asi 1445 až 1517)
  - *Suma de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*
  - připomíná Eukleidův způsob vytváření dokonalých čísel
  - posloupnost dokonalých čísel 6, 8, 496, pokračuje do nekonečna
  - 14. dokonalé číslo je 9 007 199 187 632 128
  - odpovídá číslu $2^{26}(2^{27}-1)$ (chyba)
  - dokonalá čísla střídavě končí na cifry 6 a 8 (chyba)

- Nicolas Chuquet (asi 1445 až 1488)
  - francouzský matematik píšící francouzsky
  - *Triparty en la science des nombres* (1484)
  - připomíná Eukleidovu větu o dokonalých číslech
  - kromě dokonalých čísel 6, 28, 496, 8 128

    uvádí v připojeném schématu čísla

$$2^8(2^9 - 1) = 130\,816,$$

$$2^{10}(2^{11} - 1) = 2\,096\,128,$$

$$2^{12}(2^{13} - 1) = 33\,550\,336.$$

Pouze třetí je správně!

(čísla $2^9 - 1 = 511$, $2^{11} - 1 = 2\,047$ nejsou prvočísla)

- Estienne de La Roche (konec 15. až počátek 16. stol.)
  - *L'arismethique nouvellement* (Lyon, 1520, 2. vydání 1538)
  - výrazně čerpal (brutálně opisoval) z Chuquetova spisu

    Triparty en la science des nombres
  - dokonalá čísla jsou dána formulí $2^{p-1}(2^p - 1)$,

    kde $p = 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$
  - opomíjí Eukleidův předpoklad

- Chyby opakují:
- Michael Stifel (1487–1567)
- Jacques Peletier (Peletarius, 1517–1582)
- Niccolò Fontana zvaný Tartaglia (asi 1499 až 1557)
  - prvních dvacet dokonalých čísel

    (pro $p = 2, 3, 5, 7, 9, \ldots, 39$)
- Robert Recorde (asi 1510 až 1558)
- Hudalrichus Regius
  - *Utriusque Arithmetices* (1536)
  - uvádí páté dokonalé číslo

Další dokonalá čísla

- Pietro Antonio Cataldi (1548–1626)
  - profesor na univerzitách ve Florencii a Bologni
  - tabulka prvočísel menších než 750
  - rozklad čísel menších než 800 na součin prvočísel
  - má-li být $2^p - 1$ prvočíslem, musí být p prvočíslo
  - 1603: $2^{17} - 1$ a $2^{19} - 1$ jsou prvočísla
  - šesté dokonalé číslo: $2^{16}(2^{17} - 1) = 8\,589\,869\,056$
  - sedmé dokonalé číslo: $2^{18}(2^{19} - 1) = 137\,438\,691\,328$
  - dokázal: dokonalá čísla, která popsal Eukleidés, končí na cifru 6 nebo 8
  - nestřídají se pravidelně (páté a šesté končí cifrou 6)
  - $2^p - 1$ je prvočíslem pro $p = 23, 29, 31, 37$ (třikrát se zmýlil)

- Pierre de Fermat (1601–1665)

  – francouzský právník, geniální matematik-amatér

  – 1640: čísla $2^{23} - 1$ a $2^{37} - 1$ jsou složená

- Pierre de Fermat (1601–1665)
  - francouzský právník, geniální matematik-amatér
  - 1640: čísla $2^{23} - 1$ a $2^{37} - 1$ jsou složená
- Marin Mersenne (1588–1648)
  - francouzský mnich (minorita), matematik, fyzik a filozof
  - 1644: *Cogitata physica mathematica*
  - $2^p - 1$ je prvočíslem pro

    $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$

    a žádné jiné prvočíslo menší než 250
  - podle Cataldiho: do čísla 19 (včetně) je seznam v pořádku
  - podle Fermata: neuvedl 23 a 37
  - na dalších místech jsou chyby

- Leonhard Euler (1707–1783)
  - 1732: $2^{29} - 1$ je složené
  - 1738: $2^{31} - 1$ je prvočíslo

    $2^{30}(2^{31} - 1)$ je dokonalé (osmé dokonalé číslo)

- Edouard Lucas (1842–1891)

  – 1876: $2^{67} - 1$ je složené, $2^{127} - 1$ je prvočíslo

- Pervušin

  – 1883: $2^{61} - 1$ je prvočíslo

- Powers

  – 1911: $2^{89} - 1$ je prvočíslo

  – 1913: $2^{107} - 1$ je prvočíslo

- Kraitchik

  – 1933: $2^{257} - 1$ je složené

- Teprve nyní byl zcela opraven Mersennův seznam:

  $$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 61,\ 89,\ 107,\ 127$$

  – prvních dvanáct dokonalých čísel

Mersennova prvočísla

- **Definice.** *Prvočísla tvaru* $2^p - 1$ *se nazývají Mersennova.*

  – z nich vznikají sudá dokonalá čísla

  – hledání velkých prvočísel

  Pietro Cataldi, Pierre de Fermat, Marin Mersenne,

  Leonhard Euler, Edouard Lucas, řada dalších matematiků

- 1951: 12 Mersennových prvočísel

  Od roku 1876 do roku 1951:

  největším známým prvočíslem $2^{127} - 1$ (39 cifer)

  – výpočetní technika!!!

  – 1952: $2^p - 1$ pro $p = 521,\ 607,\ 1\,279,\ 2\,203,\ 2\,281$

- 2000: 38 Mersennových prvočísel
- leden 2016: 49. Mersennovo prvočíslo $2^{74\,207\,281} - 1$

  – má 22 338 618 cifer

  – odpovídající dokonalé číslo má 44 677 235 cifer

- Otevřené problémy:

  – je Mersennových prvočísel nekonečně mnoho?

  (ekvivalentní problém)

  – je sudých dokonalých čísel nekonečně mnoho?

Lichá dokonalá čísla

- Leonhard Euler
  – otázka existence lichých dokonalých čísel je mimořádně obtížná
- James Joseph Sylvester (1814–1897)
  – studoval problém v letech 1887 a 1888

Lichá dokonalá čísla

- Leonhard Euler
  – otázka existence lichých dokonalých čísel je mimořádně obtížná
- James Joseph Sylvester (1814–1897)
  – studoval problém v letech 1887 a 1888
- Otevřený problém: existence lichých dokonalých čísel
  – liché dokonalé číslo by muselo splňovat řadu podmínek
  – muselo by být obrovské (alespoň 10^{1500})
  – muselo by mít alespoň 101 prvočíselných dělitelů (alespoň deset navzájem různých) atd.

Děkuji za pozornost !

Děkuji za pozornost !