

Převoznické úlohy aneb od hříčky ke strategii

**Martina Bečvářová
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
Praha 1, 110 00**

**Katedra didaktiky matematiky
MFF UK
Sokolovská 83
Praha 8, 186 75
becvamar@fd.cvut.cz**

I. Alkuin (nar. okolo 735, zem. 804)

- studoval na katedrální škole v Yorku
- později učitel a správce knihovny
- uznávaný vzdělanec
- 781 se v Parmě setkal s Karlem Velikým (747–814)
- pracoval na jeho dvoře, pověřen organizací vzdělávacího systému, rozšiřování vzdělanosti
- 796 na vlastní žádost jmenován opatem kláštera sv. Martina v Tours
- *Propositiones ad acuendos iuvenes*



Klasické převoznické úlohy

- úlohy č. 17, 18, 19 a 20
- považovány za **Alkuinův vynález**
- kulturně-historické souvislosti úloh jsou popsány v práci H. Gropp: *Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli – On the History of River-Crossing Problems*, in P. L. Butzer, H. T. Jongen, W. Oberschelp: *Charlemagne and his Heritage. 1200 Years of Civilisation and Science in Europe*, vol. 2 *Mathematical Arts*, Brepols, Turnhout, 1998, str. 31 –41.

Podstata úloh

překonání řeky v lodičce, máme-li k dispozici omezenou přepravní kapacitu a předem stanovené podmínky, které je třeba dodržet (hmotnost přepravovaného, nebezpečí poškození lodi, společenské konvence ...)



- Alkuin formuluje úlohy jako veselé a zábavné hříčky
- nereálnost zadání (veslují zvířátka)
- **nevýchovnost** (veslují ženy, resp. děti, muži se koukají z břehu a vymýšlejí přepravní podmínky ...)



- úkolem je najít **jedno optimální řešení**
- **tříbení logického myšlení a vytváření strategie**
- **řešení vyjádřeno slovně (krok za krokem popsána situace vznikající na březích)**
- **problém nalezení efektivního algoritmu (návod, postup, logická metoda), který by byl všeobecně použitelný a srozumitelný**

Dnes

- **teorie grafů**

- znázornění postupu pomocí názorného rovinného grafu (resp. znázornění všech variant)
- vhodné jen pro méně komplikované úlohy

- J. Sedláček: *Úvod do teorie grafů*, 3. vydání, Academia, Praha, 1981.
- H. Gropp: *Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli – On the History of River-Crossing Problems*, in P. L. Butzer, H. T. Jongen, W. Oberschelp: *Charlemagne and his Heritage. 1200 Years of Civilisation and Science in Europe*, vol. 2 *Mathematical Arts*, Brepols, Turnhout, 1998, str. 31–41.

- **lineární programování**

– automatizace hledání algoritmu řešení

- R. Borndörfer, M. Grötschel, A. Löbel: *Alcuin's Transportation Problems and Integer Programming*, in P. L. Butzer, H. T. Jongen, W. Oberschelp: *Charlemagne and his Heritage. 1200 Years of Civilisation and Science in Europe*, vol. 2 *Mathematical Arts*, Brepols, Turnhout, 1998, str. 379–409.

- **úlohy měly asi hlubší praktickou podstatu**
- **přeprava vojska (materiálu)**
[Alexander Makedonský, Hannibal Barka, Julius Ceasar, Karel Veliký, ...]
- **obtížný a velmi nebezpečný manévr**
- **nosnost a konstrukce lodí**
- **efektivnost dopravy**
- **optimalizace přepravy**
- **rozmístění zásob vody v poušti, paliva apod.**

17. úloha

Byli tři bratři, z nichž každý měl sestru a měli se přepravit přes řeku. Každý z nich pocítoval touhu po sestře svých přátel. Když přišli k řece, našli jen malou lodku, v níž se nemohli přepravit víc než dva z nich současně. Řekni, kdo můžeš, jak se přepravili přes řeku, aniž by jediná z nich byla poskvrněna.

[Ma, str. 11]



Poznámka k zadání

- ze zadání nejsou zcela jasné příbuzenské vztahy mezi osobami
- z řešení je patrné, že žena je *poskvrněna*, ocitne-li se ve společnosti muže a není u toho přítomen její bratr (přítomnost jiných žen poskvrnění nezabrání, ponechání samotných žen na jednom břehu nevede k jejich poskvrnění ...)

18. úloha

Nějaký muž měl převézt přes řeku vlka a kozu a hlávku zelí a nemohl najít jinou lod'ku než takovou, která byla schopna uvést jen dva z nich. Bylo mu však nařízeno, že má všechny převézt úplně nepoškozené. Řekni, kdo můžeš, jak je mohl nepoškozené převézt.

[Ma, str. 11]



Poznámka k zadání

- **na jednom břehu nemůže zůstat koza a vlk, resp. koza a zelí (hrozí sežrání)**
- **vlk a člověk se snášejí dobře ...?**
- **jak přimět vlka k nalodění ...?**
- **vlk, koza a zelí nemohou veslovat**
- **úloha procestovala historií (v některých učebnicích z konce 20. století)**
- **dnes se objevuje na internetu (návod na řešení pomocí baterie, drátků, žárovek a vypínačů)**

19. úloha

Muž a žena, z nichž každý vážil jeden centněř, mají dvě děti, které dohromady váží také jeden centněř, se měli přepravit přes řeku. Nalezli lod'ku, která nemůže unést více než jeden centněř. Necht' uskuteční přepravu, kdo může, aniž by se lod'ka potopila.

[Ma, str. 11]

Poznámka k zadání

- v originále je uvedena jednotka hmotnosti *plaustum*
- podle [Ma] 1 plaustum (tj. centnér) je asi 61,65 kilogramů
- hmotnost dospělého muže?

20. úloha

Ježek a ježčice mající dvě děti vážící libru se chtějí přepravit přes řeku.

[Ma, str. 11]

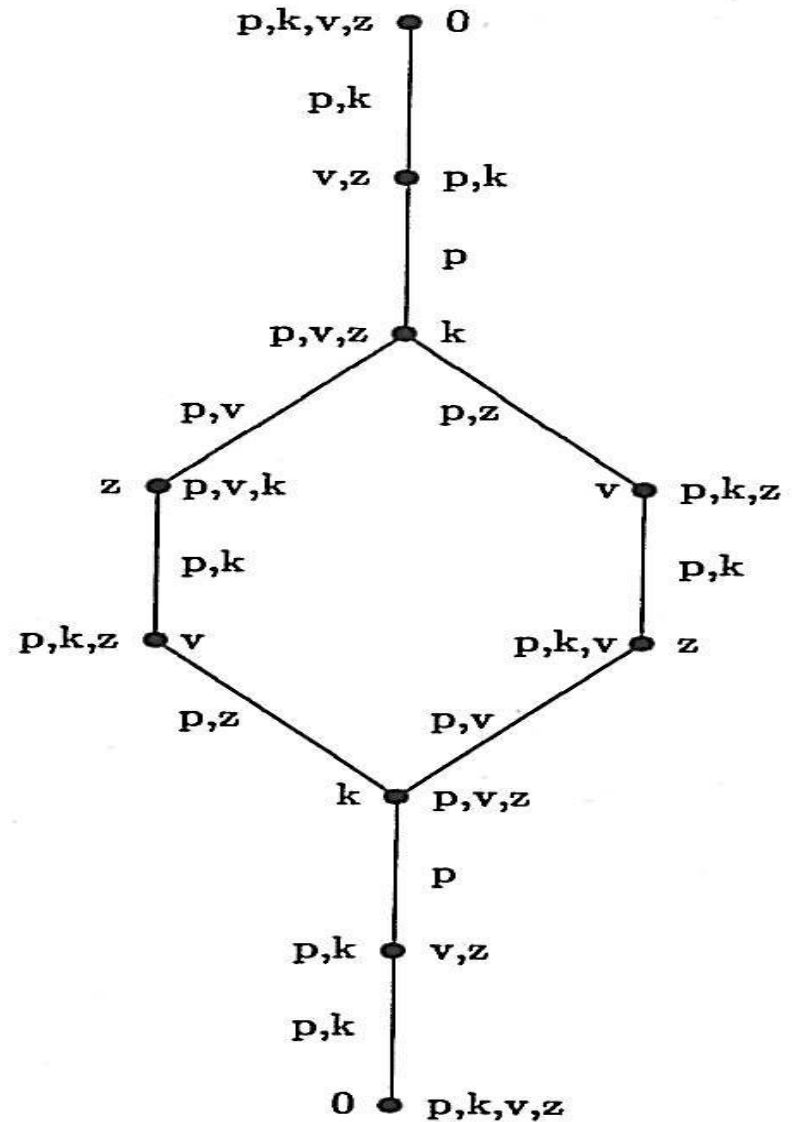


Poznámka k zadání

- zadání úlohy je neúplné
- pravděpodobně se jedná o pouhou slovní variantu předešlé úlohy
- hmotnost dospělého ježka, resp. ježčice je jedna jednotka, hmotnost dvou mladých ježečků je opět jedna jednotka, loďka maximálně uveze náklad o velikosti jedné jednotky
- *libra* – stará římská hmotnostní jednotka, původně 273 gramů, později 327 gramů

Řešení úlohy o vlku, koze, zelí a převozníkovi

- využitím grafu



- nutno vykonat **7 cest** přes řeku
- Alkuin uvádí pouze jednu možnost (odpovídá levé větvi v grafu)
- k uzlům je připojen popis obsazení levého břehu na levé straně, pravého břehu na pravé straně
- k hranám je připojen popis obsazení lodičky
- graf umožňuje přehledné zachycení průběhu přepravy, ale nehodí se k hledání řešení

Přehledná tabulka

1. břeh	řeka	2. břeh
p, v, k, z		-----
v, z	vesluje p, veze k	p, k
v, z, p	zpět vesluje p	k
z	vesluje p, veze v	p, k, v druhá možnost
z, k, p	zpět vesluje p, veze k	v
k	vesluje p, veze z	p, v, z
k, p	zpět vesluje p	v, z
-----	vesluje p, veze k	p, v, k, z

Řešení úlohy o muži, ženě a dvou dětech

1. břeh	řeka	2. břeh
m, ž, d ₁ , d ₂		-----
m, ž	veslují d ₁ , d ₂	d ₁ , d ₂
m, ž, d ₂	vesluje zpět d ₂	d ₁ , druhá možnost
m, d ₂	vesluje ž	d ₁ , ž,
m, d ₁ , d ₂	vesluje zpět d ₁	ž
m	veslují d ₁ , d ₂	d ₁ , d ₂ , ž
m, d ₂	vesluje zpět d ₂	d ₁ , ž, druhá možnost
d ₂	vesluje m	m, ž, d ₁
d ₁ , d ₂	vesluje zpět d ₁	m, ž
-----	veslují d ₁ , d ₂	m, ž, d ₁ , d ₂

- **Alkuin popisuje jednu možnost (výše uvedenou)**
- **úloha má 4 varianty řešení (2 x 2)**
- **muž vesluje 1x**
- **žena vesluje 1x**
- **děti veslují společně 3x**
- **každé dítě vesluje samo 2x**
- **$1 + 1 + 3 + 2 \times 2 = 9$ cest přes řeku**

Úloha o třech bratřech a třech sestřích

- **Alkuinovo řešení**

Nejprve se přepravím já se svojí sestrou a já se s lod'kou vrátím. Pak se přepraví obě zbývající sestry a moje sestra se s lod'kou vrátí. Potom se přepraví oba zbývající bratři a jeden z nich se vrátí i se svou sestrou, tuto nechá na břehu a přepraví se spolu se mnou. Zbylá sestra převezde lod'ku zpět, naloží moji sestru a přiveze ji za mnou, načez bratr, jehož sestra zůstala sama na počátečním břehu, přejede zpět a přiveze svou sestru. [Ma, str. 13]

- (B_i, S_i) , kde $i = 1, 2, 3$
B bratr, S sestra
- pro každé $i, j = 1, 2, 3$ platí, že muž B_i touží po ženách S_j , $i \neq j$
- čest ženy S_j je poskvrněna, je-li ve společnosti cizího muže bez přítomnosti svého bratra (tj. např. S_1, B_2, S_2 nelze)



**Maciejowska bible, Codex Manesse
(přelom 13. a 14. století)**

1. břeh	řeka	2. břeh
$(B_1, S_1), (B_2, S_2), (B_3, S_3)$		-----
$(B_2, S_2), (B_3, S_3)$	veslují (B_1, S_1)	(B_1, S_1) , tři možnosti
$B_1, (B_2, S_2), (B_3, S_3)$	zpět vesluje B_1	S_1
B_1, B_2, B_3	veslují S_2, S_3	S_1, S_2, S_3
$(B_1, S_1), B_2, B_3$	zpět vesluje S_1	S_2, S_3 , tři možnosti
(B_1, S_1)	veslují B_2, B_3	$(B_2, S_2), (B_3, S_3)$
$(B_1, S_1), (B_3, S_3)$	zpět veslují (B_3, S_3)	(B_2, S_2) , dvě možnosti
S_1, S_3	veslují B_1, B_3	$B_1, (B_2, S_2), B_3$
S_1, S_2, S_3	zpět vesluje S_2	B_1, B_2, B_3 , tři možnosti
S_1	veslují S_2, S_3	$B_1, (B_2, S_2), (B_3, S_3)$
(B_1, S_1)	zpět vesluje B_1	$(B_2, S_2), (B_3, S_3)$
-----	veslují (B_1, S_1)	$(B_1, S_1), (B_2, S_2), (B_3, S_3)$

- **Alkuin popisuje jen jednu možnost (výše uvedenou)**
- **úloha má 54 variant řešení (3 x 3 x 2 x 3)**
- **nutno 11 cest přes řeku**
- **veslují dvojice žen**
- **vesluje i jedna žena**

K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, edice Dějiny matematiky, sv. č. 15, Prometheus, Praha 2001, 101 stran.

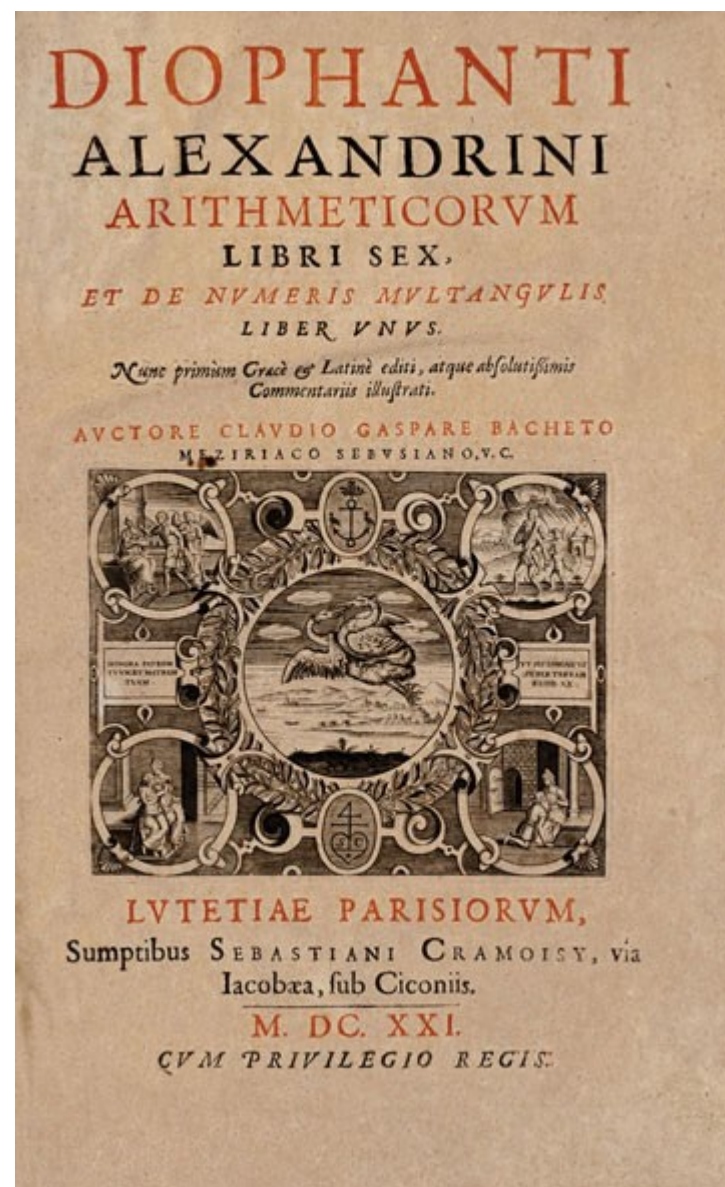
II. Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

- francouzský matematik, básník, jazykovědec a spisovatel
- milovník aritmetiky a znalec antické matematiky
- řádný člen pařížské akademie věd



- **1621** vydal vlastní latinský překlad *Diofantovy Aritmetiky* [Diophanti Alexandrini arithmeti-
corum libri sex ...]

vydání proslavil P. Fermat,
(poznámky na okrajích,
Velká Fermatova věta)



- **1612** vydal knížku *Problemnes plaisans et delectables, qui se font par les nombres ...*
[Příjemné a delikátní problémy dělané s čísly]
 - Lyon, 1612; nová vydání: Lyon, 1624, Paříž 1876 a 1879
 - překládána do mnoha jazyků
 - úlohy převzal a citoval W. W. Rouse Ball (*Mathematical Recreations and Essays*)

PROBLEMES

PLAISANS ET

delectables, qui se font par
les nombres:

*Partie recueillis de diuers auteurs, & inuentez
de nouveau avec leur demonstration,*

PAR CLAVDE GASPARD BACHET
S^r. DE MEZIRIAC.

*Tres-utiles pour toutes sortes de personnes curieuses,
qui se seruent d'Arithmetique.*



A L R O N.

Chez Pierre Rigaud, en rue Merciere, au coing de
rue Ferrandiere, à l'enseigne de la Fortune.

M. D C X I I.

avec Privilège de l'Auteur.

- aritmetické a algebraické hříčky, karetní a početní triky, převoznické úlohy, magické čtverce, Josefovská úloha, problémy vážení, přelévání tekutin
- téměř žádné geometrické hříčky
- inspirace: Alkuin, Fibonacci, Moschopoulos, Tartaglia

Modifikace převoznické úlohy

- Rota vojáků se musela přepravit na druhý břeh řeky, ale most byl zbořen a brod neexistoval. U břehu si hráli dva chlapci v člunu, kterým se mohl přepravit nejvýše jeden dospělý člověk nebo dvě děti. Jak se rota pomocí tohoto člunu přepravila na druhý břeh řeky?

[Ko, str. 137]



Oxus (Amu Darja) – Afghánistán

- **Řešení**

Chlapci se přepraví na druhý břeh, jeden z nich tam zůstane a druhý se vrátí s člunem. Pak se přepravuje jeden voják a posílá zpět v člunu druhého chlapce. Potom opět jedou na protilehlý břeh (kde je už jeden voják) oba chlapci atd., dokud se nepřepравí celá rota.

[Ko, str. 137]

1. břeh	řeka	2. břeh
rota, ch_1, ch_2		-----
rota	veslují ch_1, ch_2	ch_1, ch_2
rota, ch_2	zpět vesluje ch_2	ch_1
rota – 1, ch_2	vesluje v_1	v_1, ch_1
rota – 1, ch_1, ch_2	zpět vesluje ch_1	v_1
rota – 1	veslují ch_1, ch_2	v_1, ch_1, ch_2
rota – 1, ch_2	zpět vesluje ch_2	v_1, ch_1
rota – 2, ch_2	vesluje v_2	v_1, v_2, ch_1
rota – 2, ch_1, ch_2	zpět vesluje ch_1	v_1, v_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.

- **Méziriac slovně popisuje první krok řešení (přepravu prvního vojáka)**
- **nutno vykonat 4 cesty přes řeku, aby byl přepraven 1 voják**
- **veslují oba chlapci**
- **vesluje i každý chlapec sám**

A. G. Konforovič: *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

III. Luca Pacioli (asi 1445 až po 1515)

- italský renesanční matematik, univerzitní profesor, překladatel a autor několika spisů
- Pacioliho matematické dílo:
 - ❖ nevelký traktát o aritmetice nazvaným *Tractatus Mathematicus ad Discipulos Perusinos*
 - ❖ monumentální téměř šestisetstránková matematická encyklopedie *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita ...*

- ❖ komentovaný překlad slavných *Eukleidových Základů* (tisk 1509)
- ❖ kniha *De divina proportione* (tisk 1509)
- ❖ spis *De viribus quantitatis*
(sepsán mezi roky 1496 až 1508)
- ❖ spis *De ludo scacchorum*
(sepsán mezi roky 1496 až 1508)



Jacopo de Barbari: *Luca Pacioli*, 1495

Pacioli, Guidobaldo, tabulka, ukazovátko, rýsovací pomůcky (kružítko, pravítko, inkoust, odpichovátko, brýle (?)), *De Divina Proportione* (červená), *Eukleidovy Základy* (otevřená), dvanáctistěn, rhombicuboctahedron (zavěšen)

Stručné hodnocení *De viribus quantitatis*

- jedna z prvních prací o rekreační matematice, „magických efektech“, „vědeckých“ pokusech, hříčkách a hrátkách
- sbírka pro tříbení rozumu, vzdělávání a zábavu
- výklad matematiky na zábavných příkladech
- autor dává nejenom texty úloh a jejich řešení, ale též návody, jak hříčky tvořit
- motivace (příběhy ze života) a komunikace (obracení se na čtenáře)

Cíl

- vzbudit zájem o matematiku
- demystifikovat triky, hlavolamy a hříčky
- ukázat sílu rozumu a krásu matematiky

- rukopis uložen v kodexu č. 250, knihovna Università degli Studi di Bologna
- 24 x 16,5 cm, 309 listů (614 stránek, 98 obrázků)
- sepsán mezi lety 1496 až 1508
- nejpravděpodobněji 1497
- odkazy na spolupráci s Leonardem da Vinci
- v dedikaci (2 stránky) je uvedena řada jmen, pravděpodobně věnován **Francescovi Gonzagovi a Isabelle d'Este**

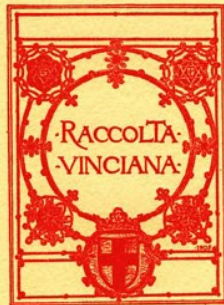
- dílo zůstalo v rukopise a bylo přístupné jen několika málo učencům
- „znovu objeveno“ v 19. století

Tiago Wolfram Nunes Dos Santos Hirth (2015)

- pozoruhodná disertační práce *Luca Pacioli and his 1500 book De Viribus Quantitatis* (disertační práce, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2015, 140 stran)
- rozbor všech tří částí doplněný poznámkami, obrázky, odkazy ...

LUCA PACIOLI

DE VIRIBUS
QUANTITATIS



MILANO - CASTELLO SFORZESCO
MCMXCVII

přepis rukopisu

kodex 250

**knihovna Università degli
Studi di Bologna)**

**Maria Garlaschi Peirani
1997**

Obsah

aritmetika, algebra, geometrické konstrukce, rekreační matematika, početní a geometrické hříčky, slovní úlohy, karetní triky, hazardní hry, hlavolamy, logické hříčky, matematické hádanky, kódování, „fyzikální a technické pokusy“

Pár poznámek o DVQ

Luca Pacioli

- užívá římské cifry, indo-arabské cifry, slovní popis**
- nedůsledně užívá symboliku**
- je značně kreativní při výběru a tvorbě úloh**
- odkazuje se na předchůdce (Eukleidés, Alcuin, Fibonacci, dále na architekty, umělce ...)**

Tři části rukopisu DQV

I. Delle forze numerali cioe de aritmetica (2^v–132^v) *(resp. delle forze della quantita)*

– 81 úloh ve dvou částech (jedna chybí)

a) algebra – klasická matematika

b) numerické hry a hříčky – rekreační matematika

– aritmetika, algebra, teorie čísel, kódování

II. Delle virtu et forza lineale et geometria (133^v–230^v)

(resp. *della virtu et forza geometrica noc dignisimmi documenti*)

– 134 úloh ve dvou částech

a) geometrické konstrukce – praktické návody ke konstrukcím

b) geometrické zázraky – dnes je již neřadíme do školní geometrie

– geometrie a její aplikace

III. De documenti morali utilissimi (231–309)

(resp. *Documenti et proverbii merchanteschi utilissime*)

- 5 částí
- 1. a 2. část – o číslech a úsečkách
- 3., 4. a 5. část – básně, přísloví, hádanky, slovní hříčky, vtípky, zábava

Non si po dare a figlioli melior parte chi li buon costume e porli al arte.

(Nemůžete dát dětem větší dar, než je naučit dobrým zvykům a vycvičit je v umění [obchodu].)

Chi non ruba non fa roba.

(Kdo nekrade, nemá zisk.

česky: Kdo nekrade, okrádá rodinu.)

Faksimile

Aboca, Sansepolcro, 2009



**1) reprodukce, 661 stran,
98 obrázků, 17 x 24 cm**

**2) analýza a italský komentář, 661
stran, 43 obrázků, 17 x 24 cm**

3) Anglické resumé a komentáře

4) box 27 x 19,5 x 9,5 cm

Modifikace převoznické úlohy

I. část, 49. až 52. příklad – „úlohy o džípu“

Jeden občan Borga má 90 jablek, které mají být doručeny jeho příteli do Perugia (30 mil vzdálené). Je najat nosič, který unese pouze 30 jablek a pokud jde s nákladem, spotřebuje 1 jablko na 1 míli. Jak to udělat, aby donesl příteli v Perugii maximum jablek? (49. příklad)

– dnes „optimalizace“ rozvozu paliva, vody ...



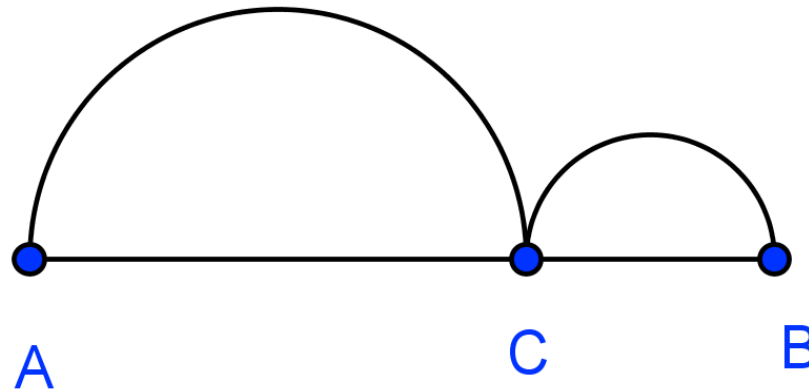
Jak to tedy bude?

Luca Pacioli uvádí dvě řešení

1. řešení

3x 20 mil

1x 10 mil



90 jablek

3 x 30 jab.

30 jab.

20 jablek

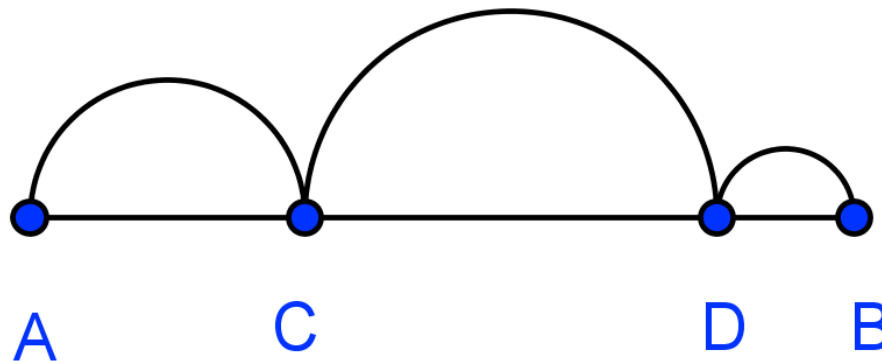
vyrazí se 30 jablky, ujde 20 mil, sní 20 jablek, v místě C nechá 10 jablek a vrátí se zpět, zopakuje ještě 2x, při třetí cestě se dostane do bodu C, kde má 30 jablek, vezme je a vyrazí do cíle, který je vzdálen 10 mil. Na cestu potřebuje 10 jablek, do cíle přinese 20 jablek (sní 70, přinese 20!!!)

2. řešení

3x 10 mil

2x 15 mil

1x 5 mil



90 jablek
jablek

60 jab.

30 jab.

25

3 x 30 jab.

2x 30 jab

1x 30 jab

vyrazí se 30 jablky, ujde 10 mil, sní 10 jablek, v místě C nechá 20 jablek a vrátí se zpět, zopakuje ještě 2x, při třetí cestě se dostane do bodu C, kde má 60 jablek, vezme 30 jablek a dojde do bodu D, který je vzdálen 15 mil, sní 15 jablek, v bodě D nechá 15 jablek a vrátí se zpět do C, cestu zopakuje ještě jednou. V bodě D má nyní 30 jablek, vezme je a vyrazí do cíle, který je vzdálen 5 mil. Při cestě sní 5 jablek, do cíle přinese 25 jablek (sní 65, přinese 25!!!)

– další úlohy jsou modifikací podmínek

**Závěr: volte lepšího nosiče nebo reálnější podmínky
dopravy!!!**

Klasická převoznická úloha

I. část, 61. příklad

Byli tři muži, z nichž každý měl ženu a měli se přepravit přes řeku. Muži byli velmi žárliví. Když přišli k vodě, našli jen malou lod'ku, v níž se nemohli přepravit víc než dva z nich současně. Jak se přepravili přes vodu, aniž by jediná žena byla poskvrněna.

- Pacioli připomíná, že obyvatelé Benátek a městečka Chioggia tento problém znají z každodenní praxe
- úlohu má v obdobné variantě i Alcuin (zde je daleko reálnější situace)



Benátky

Chioggia



K čemu mi to bude?

- **hříčka (zábava)**
- **rozvoj logického (strategického) myšlení**
- **algoritmizace úloh**
- **optimalizace řešení**
- **...**

Americká armáda prý používá úlohu „*o džípu*“ k testování schopnosti strategického myšlení a plánování operací

Děkuji za pozornost.